

Самостоятельная работа 5.

Самостоятельная работа должна быть сдана в четверг 21.02 ПЕРЕД лекцией по алгебре.

Студентам, сдавшим задачи из листка 8 на оценки 8,9,10 к 15 февраля (оценка вычисляется в 23:00 15.02) оценка за самостоятельную работу полагается равной оценке за листок 8. Такие студенты могут эту работу не выполнять и не сдавать.

Номер варианта = 1 + (остаток от деления на 25 числа $N + \Phi \cdot I$), где N — это номер студента в алфавитном списке курса, Φ — число букв в фамилии, а I — число букв в имени.

Задача 1

- 1) Пусть $G \subseteq S_n$ подгруппа, порожденная перестановками α и β . Найдите $|G|$. Коммутативна ли она? Какой из известных групп (или прямому произведению известных групп) она изоморфна? Если эта группа коммутативна, представьте ее в виде прямого произведения примарных циклических групп.
- 2) Является ли подгруппа группы G , порожденная элементом α , нормальной подгруппой в G ? Если да, найдите фактор-группу по ней.
- 3) То же задание для подгруппы, порожденной элементом β .

Вариант	n	α	β	Вариант	n	α	β
1	8	(1326)(4578)	(1427)(3865)	13	6	(132)	(645)
2	7	(134)	(567)	14	5	(25)(34)	(12)(35)
3	5	(12345)	(25)(34)	15	6	(162)(345)	(62)(34)
4	9	(12345)	(67)	16	6	(123456)	(14)(25)(36)
5	5	(12345)	(14253)	17	8	(1234)(57)	(68)
6	6	(1234)(56)	(13)	18	7	(64125)	(65)(24)(37)
7	8	(123)(456)	(78)	19	8	(12345678)	(14)(58)(23)(67)
8	5	(12345)	(13524)	20	9	(12345)	(67)(89)
9	6	(1243)	(14)(56)	21	5	(453)	(45)(12)
10	5	(15)	(53)(24)	22	6	(1234)	(13)(24)(65)
11	9	(4753)(2196)	(4259)(7631)	23	6	(12356)	(32)(15)
12	7	(1234)(567)	(1432)	24	8	(14)(7865)	(5687)
				25	9	(123)(456)	(798)

Задача 2

Пусть G множество матриц $A \in \text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$, удовлетворяющих указанному в таблице условию. Докажите, что G является подгруппой. Найдите $|G|$. Коммутативна ли группа G ? Какой из известных групп (или прямому произведению известных групп) она изоморфна? Если эта группа коммутативна, представьте ее в виде прямого произведения примарных циклических групп.

Вариант	n	p	Условие на матрицы A
1	2	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \text{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ (т.е. $\det A = 1$) вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
2	2	5	Верхнетреугольные матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3	2	3	Матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
4	2	3	$\text{O}(2, \mathbb{F}_3)$ — ортогональные матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, т.е. $AA^t = E$.
5	2	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
6	2	7	Матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
7	3	2	Верхнетреугольные матрицы $A \in \text{GL}(3, \mathbb{F}_2)$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.
8	2	5	Матрицы $A \in \text{SL}(2, \mathbb{F}_5)$ (т.е. $\det A = 1$) вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$.
9	3	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \text{GL}(3, \mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
10	2	5	Матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условию $\det A = \pm 1$.
11	2	7	Матрицы $A \in \text{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ (т.е. $\det A = 1$) вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
12	3	2	$\text{O}(3, \mathbb{F}_2)$ — ортогональные матрицы $A \in \text{GL}(3, \mathbb{F}_2)$, т.е. такие, что $AA^t = E$.
13	2	5	$\text{O}(2, \mathbb{F}_5)$ — ортогональные матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_5)$, т.е. такие, что $AA^t = E$.
14	2	5	Матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
15	2	11	Матрицы $A \in \text{SL}(2, \mathbb{F}_{11})$ (т.е. $\det A = 1$) вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
16	2	11	Верхнетреугольные матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_{11})$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
17	2	3	Матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

