Группы и алгебры Ли

Листок 5

Дифференцирования

1. Пусть $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$. Найдите коммутаторы этих элементов, а также вычислите матрицы операторов $\mathrm{ad}(e)$, $\mathrm{ad}(h)$, $\mathrm{ad}(f)$ в этом базисе.

2. Пусть матрица $x \in \mathfrak{gl}_n$ имеет n попарно различных собственных значений. Найдите собственные значения оператора $\mathrm{ad}(x)$ на $\mathfrak{gl}_n$.

3. Найдите коммутант алгебр $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{sp}_{2n}$, $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{gl}_n$.

4. Дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейный оператор $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, такой что $D[a,b] = [Da,b]+[a,Db]$. Проверьте, что коммутатор двух дифференцирований алгебры Ли снова является дифференцированием, а обычное произведение не всегда.

5. Постройте гомоморфизм из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. (Элементы образа этого отображения называются внутренними дифференцированиями.) Всегда ли это отображение является вложением? Сюръекцией?

6. Докажите, что внутренние дифференцирования образуют идеал в $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$.