Вопросы к коллоквиуму, конец февраля 2013 (указаны страницы по конспекту)

Свойства интеграла Лебега

1. Определение интеграла Лебега (стр. 31), простые свойства (стр. 32)

2. Теорема (Лебег). Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, причем $|f_n| \overset{a.e.}{\leqslant} K$, тогда справедливо (*) (стр. 33).

3*. Теорема (Лебег). Ограниченная функция на промежутке интегрируема (33) по Риману $\Leftrightarrow$ множество её точек разрыва имеет меру 0. (34)

4. Теорема. Пусть f дифференцируема и пусть f' ограничена. Тогда f' измерима и $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt$ (36)

5. Полная аддитивность интеграла, абсолютная непрерывность интеграла (37, 39)

6. Лемма Фату и Теорема Леви (41)

Теоремы о производных

1*. Теорема Лебега: Каждая монотонная функция почти всюду имеет производную. (Формулировка, лемма Рисса о светотени, подробная схема доказательства) (43-45)

2. Теорема Фуббини малая (45)

3*. Теорема. Пусть f интегрируема. Тогда $f(x) \overset{a.e.}{=} \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt\right)$ (46)

4. Определения AC функций, сумма и произведение AC функций — тоже AC функция (47)

5. Определение BV функции, вариация монотонной функции (47)

6. Теорема. Если функция абсолютно непрерывна, то она имеет ограниченное изменение (49)

7. Теорема. Пусть f суммируемая функция, $F(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} f(y)dy \Rightarrow \bigvee_a^b F = \int_{[a,b]} |f(x)|dx$ (50)

8. Теорема Жордана. Если функция имеет ограниченную вариацию, то она является суммой возрастающей функции и убывающей функции (51) и Теорема. Если $f \in AC$, то $\bigvee_a^x f \in AC$

9 Лемма. Если абсолютно непрерывная функция f монотонна и $f'(x) \overset{a.e.}{=} 0$, то $f \equiv const$ (52)

10*. Теорема. Пусть $f \in AC(a, b)$. Тогда f' существует почти всюду, интегрируема и $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\mu$. (52)

11. Всякая монотонная функция есть сумма функции скачков, абсолютно непрерывной и сингулярной (55)

12. Интеграл Лебега-Стильтьеса: определение и примеры, что будет в случае дискретной меры, что будет в случае AC меры (57)

13. Интеграл Римана-Стильтьеса: определение, теорема о среднем, теорема: если f непрерывна, то интеграл РС существует и совпадает с интералом ЛС (58)

Примеры

1. Пример последовательности интегрируемых функций $f_n \to f$, не удовлетворяющей (33)

(*) $$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

2. Пример функции, у которой есть производная везде, но такой, что эта производная не интегрируема по Риману (36)

3. Пример функции интегрируемой по Риману на $[0, 1]$, но не интегрируемой по Лебегу (33).

4*. Пример функции, не имеющей нигде производной (42)

5. Пример функции $f \in C$, $f \notin BV$ (50)

6*. Пример сингулярной строго монотонной функции (2 разных примера на стр 53 и 54)