Листок 9.

Алгебра. 1 курс, **19.02.2013**

Максимальный балл за этот листок ставится при решении из него любых 7 задач, с учетом действия знака **&** .
В этом листке линейные пространства не предполагаются конечномерными, если только явно не указано обратное.

9◇1 $\dim V = n$. Докажите, что $\dim V^* = n$.

9◇2 Пусть U — линейное подпространство в конечномерном линейном пространстве V, $\varphi \in U^*$. Докажите, что существует такая линейная функция $\psi \in V^*$, что ограничение ψ на U совпадает с φ. (Задача со звездочкой — докажите то же самое без предположения о конечномерности V.)

9◇3& Докажите, что если U и V — подпространства в линейном пространстве W, то $\mathrm{Ann}(U+V) = \mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\, V$.

9◇4 & Пусть U — линейное подпространство в линейном пространстве V.
a) Докажите, что $U^* \cong V^*/\,\mathrm{Ann}\, U$. **b)** Докажите, что $(V/U)^* \cong \mathrm{Ann}\, U$.

9◇5 & Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_n = \{P(t) \in \mathbb{K}[t], \quad \deg P \le n\}$ многочленов степени не выше n; пусть $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$.
a) Зафиксируем $a \in \mathbb{K}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = P^{(k)}(a)$ (значение k-ой производной в точке a), $k = 0, 1, \ldots, n$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.
b) Зафиксируем $n+1$ различную точку $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = P(a_k)$ (значение P в точке a_k), $k = 1, \ldots, n+1$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.

9◇6 Докажите, что линейные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ тогда и только тогда линейно независимы, когда $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_k) = \dim V - k$, и являются базисом если $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_n = \{0\}$.

9◇7 Докажите, что если $\varphi, \psi \in V^*$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, то φ и ψ пропорциональны (т.е. $\varphi = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \ne 0$).

9◇8 & Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение, $e_1, \ldots e_n$ и $g_1, \ldots g_m$ — базисы, сответственно в V и W, $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots \psi_m$ — двойственные базисы, сответственно в V^* и W^*. Как связаны матрицы операторов f и $f^* : W^* \to V^*$, записанные в этих базисах?

9◇9 Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение линейных пространств. Докажите, что
a) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\, f) \cong \mathrm{Im}\, f^*$; **b)** $\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\, f) \cong \mathrm{Ker}\, f^*$.

9◇10 Пусть ненулевые векторы $v, w \in V$ не пропорциональны. Докажите, что существует такая ненулевая линейная функция $\varphi \in V^*$, что $\varphi(w) \ne 0$, $\varphi(v) = 0$.

9◇11 Докажите, что если $\varphi \in V^*$, $\varphi \ne 0$, то $\mathrm{Ker}\,\varphi$ является максимальным линейным подпространством в V, отличным от V, и, наоборот, любое максимальное линейное подпространство в V, отличное от V, является ядром ненулевой линейной функции.

9◇12 Пусть f — линейный оператор на линейном пространстве V, которое не предполагается конечномерным. Докажите **альтернативу Фредгольма:** либо уравнение $f(x) = b$ имеет решение при любой правой части $b \in V$, либо уравнение $f^*(y) = 0$ имеет нетривиальное решение.