

**Группы и алгебры Ли**  
**Листок 6**  
**Экспоненциальное отображение**

1. Рассмотрим группу  $SL(2, \mathbb{R})$ . Докажите, что элемент

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

не лежит в образе экспоненциального отображения.

2. Рассмотрим группу Ли  $G$ , состоящую из всех отображений  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $A(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ . Опишите соответствующую алгебру Ли.

3. Является ли экспоненциальное отображение сюръективным или инъективным для группы  $GL_n(\mathbb{C})$ ?

4. Рассмотрим трёхмерную вещественную алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  с базисом  $x, y, z$  и коммутационными соотношениями  $[x, y] = z$ ,  $[z, x] = [z, y] = 0$  (эта алгебра называется алгеброй Гейзенберга). Докажите, что в соответствующей группе Ли выполнено равенство

$$\exp(tx)\exp(sy) = \exp(tsz)\exp(sy)\exp(tx).$$

Постройте какую-нибудь группу Ли с такой алгеброй Ли.

5. Выпишите левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля в глобальных координатах на группе Ли  $GL_2(\mathbb{R})$ .

6. Являются ли присоединённые представления групп  $SO_3(\mathbb{R})$ ,  $SL_2(\mathbb{C})$ ,  $U_2$  неприводимыми? точными?