Положительные операторы. Полярное разложение

Ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *положительным*, если $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Для каждого положительного оператора T существует единственный положительный оператор S в H, удовлетворяющий условию $S^2 = T$; он обозначается $\sqrt{T}$.

7.1. Исследуйте на положительность следующие операторы T в гильбертовых пространствах; в случае положительности опишите, как действует оператор $\sqrt{T}$:
1) ортогональный проектор;
2) диагональный оператор M_λ в ℓ^2 (где $\lambda \in \ell^\infty$);
3) оператор умножения M_f в $L^2(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой, f — существенно ограниченная функция на X).

7.2. Для каждого из следующих операторов T опишите, как действует оператор $|T| = \sqrt{T^*T}$:
1) – **3)** операторы из соответствующих пунктов задачи 7.1;
4) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$ (см. задачу 6.3);
5) оператор правого сдвига в ℓ^2 (см. задачу 6.11);
6) оператор левого сдвига в ℓ^2 (см. задачу 6.11).

7.3. Пусть T — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H.
1) Докажите, что если $T \geqslant 0$, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} \sqrt{T}$.
2) Докажите, что $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker} |T|$.

Ограниченный линейный оператор U в гильбертовом пространстве H называется *частичной изометрией*, если его ограничение на $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ — изометрия.

7.4. Докажите, что следующие свойства оператора U в гильбертовом пространстве эквивалентны:
(i) U — частичная изометрия;
(ii) $UU^*U = U$;
(iii) U^*U — проектор;
(iv) U^* — частичная изометрия.

7.5. Для частичной изометрии U найдите образы проекторов U^*U и UU^* (они называются, соответственно, *начальным* и *конечным* проекторами для U).

Каждый ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве H единственным образом представим в виде $T = U|T|$, где U — частичная изометрия в H, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} T$. Формула $T = U|T|$ называется *полярным разложением* оператора T.

7.6. Пусть T — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть $T = US$, где $S \geqslant 0$ и U — частичная изометрия в H, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} S$. Докажите, что $S = |T|$.

7.7. Для каждого оператора из задачи 7.2 найдите его полярное разложение.

7.8. Верно ли, что любой ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H можно представить в виде $T = US$, где S — положительный, а U — унитарный оператор в H?