Компактные операторы

Пусть V, W — банаховы пространства, B — единичный шар в V. Линейный оператор $T\colon V \to W$ называется *компактным*, если множество $\overline{T(B)}$ компактно.

8.1. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a,b] \hookrightarrow C[a,b]$.

8.2. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

8.3. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы диагональный оператор M_λ в ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или в c_0 был компактным.

8.4. 1) Может ли компактный оператор между бесконечномерными банаховыми пространствами быть сюръективным? **2)** Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

8.5. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для компактности M_f.

8.6. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

8.7. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Является ли T компактным оператором
1) из $C[0,1]$ в $C[0,1]$?
2) из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
3) из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
4) из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$?
5) из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

8.8. Пусть X — метризуемый компакт, μ — борелевская мера на X, и $K \in C(X \times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(T_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y), \tag{1}$$

содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.

8.9. Пусть V — банахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T\colon V \to \ell^p$ аппроксимируется по норме операторами конечного ранга.

Если H_1, H_2 — гильбертовы пространства, то каждый компактный оператор $T\colon H_1 \to H_2$ единственным образом представим в виде $T = \sum_n s_n(\,\cdot\,, e_n) f_n$ (*разложение Шмидта*), где (e_n) и (f_n) — не более чем счетные ортонормированные системы в H_1 и H_2 соответственно, (s_n) — невозрастающая последовательность положительных чисел. Оператор T называется *ядерным*, если $\sum_n s_n < \infty$, и *оператором Гильберта–Шмидта*, если $\sum_n s_n^2 < \infty$.

8.10. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы диагональный оператор M_λ в ℓ^2 был **1)** ядерным; **2)** оператором Гильберта–Шмидта.

8.11. Пусть $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ — оператор из задачи 8.7.
1) Вычислите его норму.
2) Найдите его разложение Шмидта.
3) Является ли он ядерным?

Следом положительного оператора T в гильбертовом пространстве H называется число $\operatorname{Tr} T = \sum_i (Te_i, e_i) \in [0, +\infty]$, где (e_i) — произвольный ортонормированный базис в H. Ограниченный линейный оператор T в H является ядерным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr}|T| < \infty$, и оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr}(T^*T) < \infty$. Множество $S^1(H)$ всех ядерных операторов и множество $S^2(H)$ всех операторов Гильберта–Шмидта являются идеалами в алгебре $\mathscr{B}(H)$ всех ограниченных операторов в H. Формула $\operatorname{Tr} T = \sum_i (Te_i, e_i)$ определяет линейный функционал Tr на $S^1(H)$, называемый *следом*. Пространство $S^1(H)$ является банаховым относительно нормы $\|T\|_1 = \operatorname{Tr}|T|$, а $S^2(H)$ — гильбертовым относительно скалярного произведения $(S, T) = \operatorname{Tr}(T^*S)$.

8.12. Пусть H — гильбертово пространство. *Комплексно-сопряженное* гильбертово пространство $\bar{H}$ определяется следующим образом: как абелева группа оно совпадает с H, умножение на скаляры в $\bar{H}$ вводится формулой $\lambda * x = \bar{\lambda} x$, а скалярное произведение — формулой $(x, y)_{\text{new}} = (y, x)$. Докажите существование унитарного изоморфизма

$$H \underset{\text{hilb}}{\otimes} \bar{H} \to S^2(H), \quad x \otimes y \mapsto (\,\cdot\,, y)x$$

(где символ $\otimes_{\text{hilb}}$ означает гильбертово тензорное произведение).

8.13* (*следовая двойственность*)**.** Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что формула $S \mapsto (T \mapsto \operatorname{Tr}(ST))$ определяет изометрический изоморфизм между пространствами **1)** $S^1(H)$ и $\mathscr{K}(H)^*$; **2)** $\mathscr{B}(H)$ и $S^1(H)^*$.

Замечание. По причинам, указанным в задачах 8.10 и 8.13*, пространство $\mathscr{K}(H)$ полезно представлять себе как операторный аналог пространства c_0, пространства $S^p(H)$ $(p = 1, 2)$ — как операторные аналоги пространств ℓ^p, а пространство $\mathscr{B}(H)$ — как операторный аналог пространства ℓ^∞.

8.14. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $K_1, K_2 \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, T_{K_1}, T_{K_2} — соответствующие интегральные операторы в $L^2(X, \mu)$ (см. (1)). Положим $T = T_{K_1} T_{K_2}$. Докажите, что
1) $T = T_K$, где $K(x, y) = \int_X K_1(x, z) K_2(z, y)\, d\mu(z)$;
2) $\operatorname{Tr} T_K = \int_{X \times X} K_1(x, y) K_2(y, x)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$.

8.15*. Пусть $I = [a, b]$ — отрезок действительной прямой, $K \in C(I \times I)$, T_K — соответствующий интегральный оператор в $L^2(I)$ (см. (1)).
1) Докажите, что если оператор T_K ядерный, то

$$\operatorname{Tr} T_K = \int_a^b K(x, x)\, dx.$$

2) Покажите, что T_K может быть неядерным.