КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА, Мера, измеримые функции, интеграл Лебега
математический анализ, 2 курс, 2-3 модуль, 11.2012–02.2013
А.М. Красносельский

Лекция 1 (29 октября 2012)

Итак, мы завершили часть курса, относящуюся к несобственным интегралам, бесконечным произведениям, к интегралам, зависящим от параметра и рассмотрели несколько функций, которые возникают во многих разных разделах математики. Теперь начинаем новую тему: теория меры, измеримые функции, интегралы Римана, Стильтьеса и Лебега, пространство L^2.

1. Теория меры. Философия

1) Мера - это общее название длины, площади, объема и т.д. Я буду говорить о разных размерностях, иногда на прямой, иногда на плоскости, в $\mathbb{R}^3$. Про $\mathbb{R}^n$ — почти не буду, основные конструкции переносятся и в $\mathbb{R}^n$.

2) Часто буду говорить про прямую. Рассуждение о том, что длина используется в двух смыслах. Длина, как расстояние, есть в любых метрических пространствах. Длина, как одномерный аналог площади - это мера.

3) Понятие площади сложное. Повториться: школьные отдельные определения для площади круга, прямоугольника и т.д. Что нет общего определения. Что площадь криволинейной трапеции на 1м курсе — отдельное определение, только для специальных функций.

4) Как бы было хорошо, если бы для любого множества была бы мера, которая удовлетворяет естественным свойствам:

1. Каждому ограниченному множеству $A \in \mathbb{R}^n$ сопоставлено $V(A) \geqslant 0$, называемое (n-мерным) объемом этого множества.
2. Объем аддитивен: если $A \bigcap B = \emptyset$, то $V(A \bigcup B) = V(A) + V(B)$.
3. Если множества A и B конгруэнтны (совмещаются движением), то их объемы равны.
4. Объем единичного куба равен 1.

У этих аксиом есть фатальный недостаток: они внутренне противоречивы. Противоречие предъявлено в 1914 году Хаусдорфом. В 1926г. Банах и Тарский сформулировали теорему.

Теорема (парадокс Банаха-Тарского). Можно разбить стандартный шар $B \in \mathbb{R}^3$ на 5 непересекающихся множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и построить такие множества B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, что

1. Каждое множество B_i конгруэнтно соответствующему множеству A_i.
2. B_1 и B_2 не пересекаются и их объединение равно B.
3. B_3, B_4 и B_5 попарно не пересекаются и их объединение равно B.

Доказывать эту теорему не будем, приведена для общего образования. Далее будут приведены более простые (но несколько менее “парадоксальные”) построения. Чтобы обойти проблемы, связанные с парадоксом Банаха-Тарского, нужно отказаться от предположения, что все множества имеют объем. Множества, для которых определен объем, называются измеримыми.

2. Мера Жордана на плоскости

1. Мера прямоугольника по определению — произведение сторон.

2. Конечная аддитивность $\Rightarrow$ определена мера любой фигурки Δ, составленной из конечного числа прямоугольников (с дырками, несвязной). Называется *элементарное множество.*

3. Внутренняя μ_J и внешняя μ^J жорданова мера любого множества A:

$$\mu_J(A) = \sup\{\xi :\ \xi = \mu(\Delta),\ \Delta \subset A\}, \qquad \mu^J(A) = \inf\{\xi :\ \xi = \mu(\Delta),\ \Delta \supset A\}.$$

4. Множество называется измеримым по Жордану, если $\mu_J(A) = \mu^J(A)$.

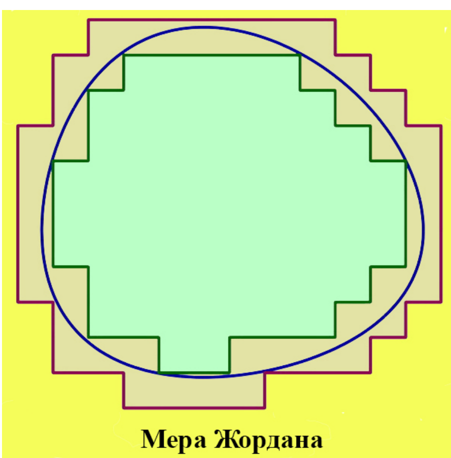
5. Пример множества неизмеримого по Жордану (рациональные точки квадрата).

6. Естественно, измеримы все круги, многоугольники и прочее, у чего есть площадь. Измеримы криволинейные трапеции, площадь которых определялась определенным интегралом.

7. Множество, имеющее меру ноль по Жордану. **Множество имеющее границу меры ноль по Жордану, измеримо по Жордану.**

8. Мера Жордана инвариантна относительно движений евклидова пространства.

Приведённое понятие меры ввели Пеано (1887) и Жордан (1892). Конечность количества прямоугольников — существенна. **Пример.** Прямоугольник, в нем 2 множества с фрактальной границей. Чему равна мера множеств и что остается на границу. Другие множества с нетривиальными границами: 1. Канторово множество. 1.1. Обычное — треть выкидываем. Картинка и рассуждение с троичными дробями. 1.2. Десятичные дроби без 7 в записи. 1.3. Положительной меры. 2. Несколько открытых связных множеств на плоскости с общей границей.



Все множества, граница которых состоит из конечного числа гладких кривых и точек, измеримы по Жордану. Тем не менее, существуют множества, *ограниченные простой замкнутой кривой Жордана, которые не измеримы по Жордану.* На картинке: множество A ограниченное гладкой кривой (синяя кривая), элементарное множество, содержащееся внутри A (зеленое), и содержащее A (коричневое),

Множество измеримо по Жордану, если внутренняя мера равна внешней мере.

Нужны меры более широкого класса множеств, чтобы мера была счетно-аддитивной.

Зачем вообще нужны меры? Мера — мегаважное понятие: теория вероятностей $\cong$ теория меры; функциональный анализ, дифференциальные уравнения, динамические системы опираются на них. Меры порождают важнейшие функциональные пространства. Меры - это площади и объёмы. Это вся физика, биология, химия... удельная плотность.

Отдельно сказать слова, про конечность–бесконечность меры, сравнив с площадью–объёмом.

3. Абстрактная теория меры

3.1. Алгебры множеств. X - основное множество, $\mathbf{A} \subset 2^X$ — семейство подмножеств. Семейство называется *алгеброй множеств* на если оно подчиняется следующим аксиомам: (1) $X \in \mathbf{A}$, (2) $A \in \mathbf{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathbf{A}$, (3) $A_1, A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \bigcap A_2 \in \mathbf{A}$. Очевидные свойства:

- пересечение двух алгебр является алгеброй;
- $\emptyset \in \mathbf{A}$;
- пересечение любого конечного числа множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$;
- $A_1, A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \bigcup A_2 \in \mathbf{A}$; (дополнение к объединению есть пересечение дополнений);
- объединение любого конечного числа множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$;
- $A_1, A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathbf{A},\ A_1 \triangle A_2$; $\triangle$ — симметрическая разность, $A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.

Обозначение. Пусть $A \bigcap B = \emptyset$ (A и B — *дизъюнктны*). Тогда обозначаем $\boxed{\boldsymbol{A} \coprod \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{B}}$. Если употребляем знак дизъюнктного объединения, то подразумевается дизъюнктность множеств.

Утверждение. $\forall\ A_n \in \mathbf{A}\ \exists B_n \subset A_n,\ B_n \in \mathbf{A} : \bigcup A_n = \coprod B_n$.

Доказательство. $B_1 = A_1,\ B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right), \quad k > 1$ чтд

Пусть $\Phi \in 2^X$. Рассмотрим $\mathbf{A}_\Phi = \bigcap \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \supset \Phi,\ \mathbf{A} - \text{алгебра}\}$. Очевидно, что $\mathbf{A}_\Phi$ — минимальная алгебра множеств, содержащая Φ. Говорят: Φ *порождает алгебру* $\mathbf{A}_\Phi$ или $\mathbf{A}_\Phi$ *порождена* Φ.

Конструкция. Пусть $\Phi \in 2^X,\ X \in \Phi$. Множества, получаемые из элементов Φ конечным числом операций пересечения и перехода к дополнению, образуют алгебру $\mathbf{A}_\Phi$.

Определение. Алгебра $\mathbf{\Sigma} \in 2^X$ называется σ-алгебра, если выполнено условие

$$\forall\ A_n \in \mathbf{\Sigma},\ n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{справедливо} \quad \bigcup A_n \in \mathbf{\Sigma}.$$

Очевидно, что в σ-алгебре $\forall\ A_n \in \mathbf{\Sigma},\ n = 1, 2, 3, \dots$ справедливо $\bigcap A_n \in \mathbf{\Sigma}$.

Также наименьшая σ-алгебра $\mathbf{\Sigma}_\Phi = \bigcap \{\mathbf{\Sigma} : \mathbf{\Sigma} \supset \Phi,\ \mathbf{\Sigma} - \sigma\text{-алгебра}\}$ порождается Φ.

Пусть X топологическое пространство (или метрическое, или просто прямая). Тогда σ-алгебра $\mathbf{B}$, порождённая семейством всех открытых подмножеств X, называется σ-алгеброй борелевских множеств на X. Элементы σ-алгебры $\mathbf{B}$ называются *борелевскими множествами*.

Рассуждения, которые можно не запоминать в деталях!

К сожалению, в общем случае для σ-алгебры, порождённой семейством множеств, и, в частности, для системы борелевских подмножеств топологического пространства, нет хорошего конструктивного описания, аналогичного рассмотренной конструкции про минимальную алгебру. Тем не менее, некоторое представление о борелевских множествах можно составить, исходя из следующих соображений. Семейство $\mathbf{B}$ содержит все открытые подмножества пространства X. Поскольку $\mathbf{B}$ — алгебра, она содержит и дополнения ко всем открытым множествам, то есть все замкнутые множества. Как σ-алгебра, она содержит все ***счётные объединения замкнутых множеств*** (такие множества называются множествами класса F_σ). Также $\mathbf{B}$ содержит все ***счётные пересечения открытых множеств*** — множества класса G_δ. Счётные объединения множеств класса G_δ называются множествами класса $G_{\delta\sigma}$; счётные пересечения множеств класса F_σ) называются множествами класса $F_{\sigma\delta}$); счётные объединения множеств класса $F_{\sigma\delta}$) образуют класс $F_{\sigma\delta\sigma}$); аналогичным образом вводятся борелевские классы $G_{\delta\sigma\delta}$), $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$) и так далее до бесконечности. Все эти классы множеств содержатся в σ-алгебре борелевских множеств, но даже борелевские множества на отрезке не исчерпываются множествами вышеперечисленных борелевских классов.

Важность борелевских множеств обусловлена тем, что множества, естественно возникающие в задачах анализа, множества точек непрерывности, точек гладкости, точек сходимости и т.д., как правило, являются борелевскими множествами, причём не очень далёких борелевских классов.

Пример задачи про G_δ. Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, является поточечным пределом непрерывных функций (*называется функция 1-го класса по Бэру*). Пример функции 2-го класса по Бэру: функция Дирихле. Задача: если f — функция 1-го класса по Бэру, то $f^{-1}([a,b]) \in G_\delta$ для любого отрезка $[a,b]$.

Чтобы получить все борелевские множества, нужно определить классы F и G не только для случая, когда индексы $\sigma, \delta, \sigma\delta, \delta\sigma, \sigma\delta\sigma, \delta\sigma\delta \ldots$ — конечные последовательности, но и для любых счётных ординалов. Тут мы сталкиваемся с одним из вопросов теории меры, где нужно знание порядковых чисел и трансфинитной индукции.

Топологические пространства, допускающие счётное покрытие нигде не плотными подмножествами, относятся к пространствам первой категории Бэра, не допускающие такого покрытия — к пространствам второй категории Бэра.

Пример. Совокупность полулучей (a, ∞) порождает σ-алгебру борелевских множеств на прямой.

Произведение σ-алгебр. Дано: $(X_1, \mathbf{\Sigma}_1)$, $(X_2, \mathbf{\Sigma}_2)$ — множества и σ-алгебры на них. Тогда на $X_1 \times X_2$ определена σ-алгебра $\mathbf{\Sigma}_1 \otimes \mathbf{\Sigma}_2$ — минимальная, содержащая все “прямоугольники” $A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathbf{\Sigma}_i$.

4. Конечно-аддитивные меры

Мера — неотрицательная функция на множествах. *Измеримое множество* множество, принадлежащее области определения меры.

Определение. Пусть есть алгебра $\mathsf{A} \in 2^X$. Неотрицательная функция $\mu: \ \mathsf{A} \to [0, \infty)$, удовлетворяющая равенству $\mu\left(A \coprod B\right) = \mu(A) + \mu(B)$ называется мерой (конечно-аддитивной).

Свойства. Пусть μ — конечно-аддитивная мера на алгебре $\mathsf{A} \subset 2^X$. Тогда

1. $A, B \in \mathsf{A} \ \Rightarrow \ \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \bigcap B)$;
2. $A, B \in \mathsf{A}, \ A \subset B \ \Rightarrow \ \mu(A) \leqslant \mu(B)$; в частности, $\mu(B) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A) = 0$;
3. $\mu(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A \bigcup B) = \mu(B), \ \mu(B \setminus A) = \mu(B)$;
4. $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$;
5. Суббаддитивность: $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(A_i)$.

Последнее равенство можно написать и точнее, пример для $k = 3$: $\mu(A \bigcup B \bigcup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \bigcap B) - \mu(A \bigcap C) - \mu(C \bigcap B) + \mu(A \bigcap B \bigcap C)$.

5. Счетно-аддитивные меры

Пусть $\mathbf{\Sigma} \in 2^X$ — σ-алгебра. Функция μ счетно-аддитивна, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный дизъюнктный набор множеств, $A_i \in \mathbf{\Sigma}$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тогда $\quad \mu\left(\coprod\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Требование $\mu(\emptyset) = 0$ добавлено для того, чтобы исключить единственный пример, в котором мера любого множества равна $+\infty$.

В определении в правой части стоит сумма ряда. Поскольку все слагаемые неотрицательны, сумма не зависит от порядка слагаемых.

Определение важно особенно для теории вероятностей (вероятностная мера $\Leftrightarrow \mu(X) = 1$), там так и начинаются тексты: пусть дано вероятностное пространство $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$. Причем там множество X вполне бывает конечным, не обязательно $X = \mathbb{R}^n$.

Будем полагать, что мера всего множества X конечна.

Свойства.

1. Монотонность: если множества A и B измеримы и $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
2. Субаддитивность: $\mu(A \bigcup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$ для любых измеримых множеств A и B.
3. $A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$;
4. Пусть $\mu(A_1) < \infty$, $A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Замечание: условие $\mu(A_1) < \infty$ существенно.
5. Счетная субадитивность: $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. В частности, $\mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.
6. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный набор множеств, $A_i \in \mathbf{\Sigma}$, $\mu(A_i \bigcap A_j) = 0$ при $i \neq j$.

   Тогда $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Это $\sim$ σ-аддитивность, но $\mu(A_i \bigcap A_j) = 0$ вместо $A_i \bigcap A_j = \emptyset$.

Докажем свойство 3. Обозначим

$$B_n = A_{n+1} \setminus A_n,\ A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_1 \coprod \left(\coprod_{k=1}^{\infty} B_k\right) = A_\infty,\ A_1 \coprod \left(\coprod_{k=1}^{n} B_k\right) = A_{n+1} \ \Rightarrow$$

$$\mu(A_\infty) = \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \qquad \text{чтд.}$$

Ещё **докажем свойство 5**. Множества $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ образуют возрастающую по n цепочку, поэтому в неравенстве $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ можно перейти к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right), \qquad \lim \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Ещё **докажем свойство 6**. Введем множество $D = \bigcup\limits_{j,k\in\mathbb{N}, j\neq k} \left(A_j \bigcap A_k\right)$, $\mu(D) = 0$. Теперь пусть $B_j = A_j \setminus D$, к дизъюнктным множествам B_j применим свойство счетной аддитивности и всё получится.

Простые примеры. В этих примерах можно считать, что все множества измеримы.

1. Считающая мера. Мера множества равна количеству его элементов.

2. δ-мера Дирака. Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и положим $\mu(A) = 1$, если $x_0 \in A$ и $\mu(A) = 0$, если $x_0 \notin A$.

3. Положим меру любого счетного множества равной 0, а любого несчетного — равной $+\infty$.

4. Измеримое подмножество пространства с мерой само является пространством с мерой.

5. Пример на $X = \mathbb{N}$, $\mathbf{\Sigma} = 2^{\mathbb{N}}$. Пусть дан ряд $\sum a_n < \infty,\ a_n > 0$. Положим $\mu(s) = \sum_{n\in s} a_n$, $s \in \mathbf{\Sigma}$. Это счетно-аддитивная мера, причем это общий вид меры на таком $\mathbf{\Sigma}$. Для доказательства просто посмотрим меру одноточечных множеств, всё остальное следует из аксиом.

6. Счетная аддитивность конечно аддитивной меры эквивалентна каждому из условий: меры множеств любой убывающей цепочки с пустым пересечением $\to 0$ или меры множеств любой возрастающей цепочки удовлетворяют соотношению $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Определения. Тройка $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ называется *пространством с мерой.* Пространство $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ — *полное*, если $\forall\ A \in \mathbf{\Sigma} : \mu(A) = 0$ справедливо $B \subset A \Rightarrow B \in \mathbf{\Sigma}$. Назовем множество B *пренебрежимым*, если $\exists A \in \mathbf{\Sigma} :\ A \supset B,\ \mu(A) = 0$.

Свойства пренебрежимых множеств.

– если множество B пренебрежимо и $B \in \mathbf{\Sigma}$, то $\mu(B) = 0$;

– если множество B пренебрежимо, то и все его подмножества пренебрежимы;

– объединение конечного или счётного семейства пренебрежимых множеств пренебрежимо.

Введем эквивалентность: $A \sim B \Leftrightarrow A \triangle B$ пренебрежимо; $\triangle$ — знак симметрической разности $A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$. Проверить эквивалентность (рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность следует из включения $A \triangle C \subset (A \triangle B) \bigcup (B \triangle C)$).

Простые свойства.

1. $A \sim B \Rightarrow (X \setminus A) \sim (X \setminus B)$. **Доказательство.** $(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$.

2. $A_n \sim B_n \Rightarrow \bigcup A_n \sim \bigcup B_n,\ \bigcap A_n \sim \bigcap B_n$ (множество индексов n конечно или счетно); **Доказательство.** $\bigcup A_n \triangle \bigcup B_n,\ \bigcap A_n \triangle \bigcap B_n \subset \bigcup (A_n \triangle B_n)$.

3. $A \sim B,\ A, B \in \mathbf{\Sigma} \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$. **Доказательство.** $\mu(A \triangle B) = 0 \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$, $\mu(A) = \mu(A \bigcap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \bigcap B) = \mu(A \bigcap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

Пополнение $\boldsymbol{\sigma}$-алгебры по мере. Теперь по пространству $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ определим семейство $\mathbf{\Sigma}' \in 2^X$: $A \in \mathbf{\Sigma}' \Leftrightarrow \exists B \in \mathbf{\Sigma} :\ A \sim B$.

Семейство $\mathbf{\Sigma}'$ содержит σ-алгебру $\mathbf{\Sigma}$ и также образует σ-алгебру.

Доопределим меру μ до меры μ', заданной на $\mathbf{\Sigma}'$. Проверить корректность определения!

Теорема. Мера μ' счетно-аддитивна.

Доказательство. Пусть $A_n \in \mathbf{\Sigma}'$ — дизъюнктная последовательность, $B_n \in \mathbf{\Sigma}$, $B_n \sim A_n$. Очевидно, $\mu(B_i \bigcap B_j) = 0$ при $i \neq j$. По свойству 6:

$$\bigcup A_n \sim \bigcup B_n : \ \mu'\left(\bigcup A_k\right) = \mu\left(\bigcup B_k\right) = \sum \mu(B_k) = \sum \mu'(A_k) \qquad \text{чтд.}$$

Построенное полное пространство $(X, \mathbf{\Sigma}', \mu')$ называется пополнением пространства $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$.

Пространство полно iff оно совпадает со своим пополнением.

Задача. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{\Sigma} \in 2^X$. Пусть есть мера μ причем $\mu(X) = 1$. Пусть A — множество всех точек, принадлежащих бесконечно многим из множеств A_i. Докажите, что $A \in \mathbf{\Sigma}$ и $\mu(A) \geqslant \overline{\lim}\ \mu(A_i)$. **Решение.** $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n, \quad S_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Множества S_n образуют убывающую цепочку, $\bigcap S_n = A$. Поэтому $\lim \mu(S_n) = \mu(A)$, но $S_n \supset A_n$ чтд.

Лекция 2 (07 ноября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) обсудили абстрактное понятие меры на алгебрах множеств,

2) конечной и счетной аддитивности семейств множеств и мер,

3) ввели меру Жордана, она интуитивно понятна, но не годится для многих приложений,

4) рассмотрели абстрактные конечно аддитивные меры, σ-аддитивные меры и их простейшие свойства.

5) особенно важно понятие непрерывности меры, напомнить про монотонные цепочки множеств.

Сейчас построим меру на плоскости. Не на прямой, так как там есть дополнительные возможности, которых нет на плоскости и в $\mathbb{R}^n$.

Мера Лебега. Существует единственная мера в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и такая, что мера стандартного единичного куба равна 1. Естественно, $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$.

6. Мера элементарных плоских множеств

Прямоугольники. Будем называть *прямоугольниками* множества $\{(x, y) : \ x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ (открытый прямоугольник), $\{(x, y) : \ x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ (замкнутый прямоугольник), а также куча промежуточных вариантов с произведениями других вариантов промежутков.

Подчеркну, речь идёт только о прямоугольниках со сторонами, параллельными осям.

Мера прямоугольника — его площадь — произведение длин его сторон. Можно сказать, что отрезок — это прямоугольник со стороной 0.

Свойства: неотрицательность, аддитивность (если прямоугольник разбит на конечное число прямоугольников, то справедливо соответствующее равенство).

Элементарное множество — множество, которое можно представить в виде объединения конечного числа прямоугольников. Связность не обязательна! Если можно одним способом, то можно счетным множеством способов.

Утверждение 1. Элементарные множества образуют кольцо, то есть объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами.

Если мы будем рассматривать элементарные множества, принадлежащие квадрату (или фиксированному элементарному множеству), то это будет алгебра.

Доказательство. Пересечение 2х прямоугольников - прямоугольник. Поэтому, если $A = \bigcup P_k, \ B = \bigcup Q_m$, то $A \bigcap B = (\bigcup_k P_k) \bigcap (\bigcup_m Q_m) = \bigcup_{k,m} \Big(P_k \bigcap Q_m \Big)$. Остальное — также просто.

Утверждение 2. Если элементарное множество A представлено в виде объединения конечного числа дизъюнктных прямоугольников двумя различными способами $A = \coprod P_k = \coprod Q_m$, то $\sum \mu(P_k) = \sum \mu(Q_m)$

Доказательство. $\displaystyle\sum_k \mu(P_k) = \sum_{k,m} \mu(P_k \bigcap Q_m) = \sum_m \mu(Q_m)$.

Назовем *мерой элементарного множества* сумму мер прямоугольников разбиения. Корректность следует из Утверждения 2. Множество всех элементарных множеств будем обозначать $\mathfrak{A}$.

Конечная аддитивность на $\mathfrak{A}$ следует из Утверждения 2.

Утверждение 3 ($\boldsymbol{\sigma}$-субаддитивность). Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $A_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \dots$, причем $\displaystyle A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\displaystyle\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Доказательство.

1. Сначала зафиксируем $\varepsilon > 0$.

2. Потом по нему построим замкнутое множество $A^* \subset A \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее $\mu(A^*) \geqslant \mu(A) - \varepsilon/2$. Каждый из прямоугольников, составляющих A, заменим замкнутым чуть меньшим.

3. Потом по каждому множеству $A_n \in \mathfrak{A}$ построим открытое $A_n^* \supset A_n \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее $\mu(A_n^*) \leqslant \mu(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}$.

4. По построению, $A^* \subset \bigcup A_n^*$.

5. Выберем по лемме Гейне–Бореля из бесконечного открытого покрытия A_n^* замкнутого множества A^* конечное подпокрытие $\{A_{n_1}^*, \dots, A_{n_M}^*\}$ из M множеств. При этом $\mu(A^*) \leqslant \sum_{j=1}^{M} \mu(A_{n_j}^*)$.

6. Теперь $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_n) + \varepsilon$, так как ε произвольно, то чтд.

Это мы доказали σ-субаддитивность меры на элементарных множествах.

$\boldsymbol{\sigma}$-аддитивность. Теперь пусть $A, A_n \in \mathfrak{A}$ и $\displaystyle A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\displaystyle\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

В силу конечной аддитивности при любом N

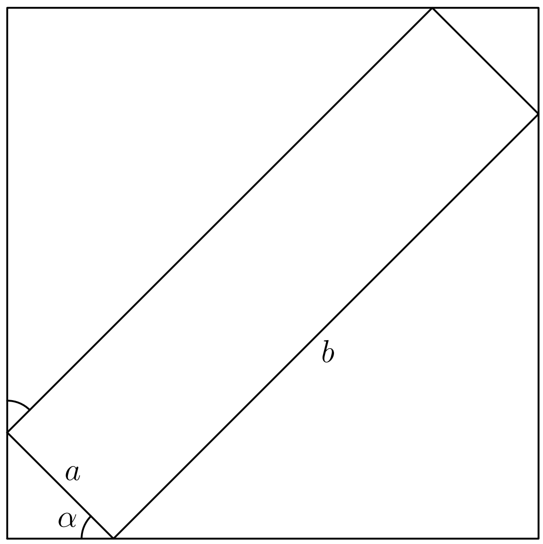
$$A \supset \coprod_{n=1}^{N} A_n \Rightarrow \mu(A) \geqslant \mu\left(\coprod_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

переходим к пределу, получаем $\displaystyle\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, из σ-субаддитивности следует σ-аддитивность.

Замечание 1. Может показаться, что мы просто перешли к пределу и всё, это не так! Мы использовали кучу всего, например лемму Гейне–Бореля. Вообще говоря, из аддитивности σ-аддитивность не следует.

Замечание 2. Это мы определили плоскую σ-аддитивную меру на элементарных множествах. Теперь надо распространить меру на другие множества, чтобы была борелевская σ-алгебра.

Замечание 3. Вообще-то, $A_n, \coprod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ — это странная конструкция. Может быть, правильнее формулировать так: $\displaystyle A \in \mathfrak{A},\ A_n \in \mathfrak{A},\ A \supset \coprod_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.



$$S = (a \sin\alpha + b\cos\alpha)(b\sin\alpha + a\cos\alpha) -$$

$$-a^2 \sin\alpha\cos\alpha - b^2 \sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= ab\sin^2\alpha + ab\cos^2\alpha = ab$$

Рис. 1: Мера произвольного прямоугольника

Лебегова мера плоских множеств. Пусть основное множество $X = [0,1] \times [0,1]$.

Определение внешней меры. Для любого $A \in 2^X$ положим

$$\mu^*(A) = \inf_{P_k\colon \bigcup P_k \supset A} \sum \mu(P_k) \qquad (P_k - \text{прямоугольники}).$$

Берутся конечные или счетные системы прямоугольников. Если брать в определении не прямоугольники, а элементарные множества, получим то же самое.

Если $A \in \mathfrak{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Теорема. Внешняя мера σ-субаддитивна на 2^X: $A \subset \bigcup A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum \mu^*(A_n)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, докажем $\mu^*(A) \leqslant \sum \mu^*(A_n) + \varepsilon$, отсюда всё будет следовать. Каждое множество A_n покроем системой прямоугольников с точностью до $\varepsilon/2^{n+1}$ и всё получится.

Определение. Множество A называется *измеримым по Лебегу*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Лебегова мера измеримого множества — его внешняя мера.

Что то же: по $\varepsilon_n \searrow 0$ строим B_n, тогда $\mu(A) = \lim \mu(B_n)$.

Задачи: доказать формулу для меры круга, сначала доказав формулу, для меры произвольного треугольника, начав с меры прямоугольного, у которого катеты параллельны осям.

Ближайшие цели:

1. Доказать, что множество измеримых подмножеств X образует σ-алгебру $\mathfrak{L}$;

2. Доказать, что μ — это σ-аддитивная мера на σ-алгебре $\mathfrak{L}$.

3. Потом докажем, что все открытые — измеримы.

Лемма 1. $A \in \mathfrak{L} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathfrak{L}$. Следует из равенства $(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$ (это аксиома алгебры).

Лемма 2. $A_n \in \mathfrak{L},\ n = 1, \ldots, N \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathfrak{L},\ \bigcup A_n \in \mathfrak{L}$ (другая аксиома алгебры).
Доказательство достаточно провести для $N = 2$.
Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}$, тогда $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon/2$.

$$(A_1 \bigcup A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2),\ \Rightarrow$$
$$\mu^* \left((A_1 \bigcup A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \right) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon.$$

Следствие. Разность и симметрическая разность двух измеримых множеств измеримы.

Доказали, что измеримые множества образуют алгебру.

Лемма 3. $\forall A, B \in 2^X :$ справедливо $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$.
Утверждение следует из

$$A \subset B \bigcup (A \triangle B),\ B \subset A \bigcup (A \triangle B) \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B),\ \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B).$$

Лемма 4. μ — конечно аддитивна, то есть $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}$ справедливо $\mu\left(A_1 \coprod A_2\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.
Доказательство. Смотри следующую лекцию.

Лекция 3 (12 ноября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы начали конструировать плоскую σ-аддитивную конкретную меру, меру Лебега; сегодня продолжим.

1) Были определены элементарные множества, их мера, σ-субаддитивность

2) Была определена внешняя мера любого $A \in 2^X$:

$$\mu^*(A) = \inf_{P_k\colon \bigcup P_k \supset A} \sum \mu(P_k) \qquad (P_k - \text{прямоугольники}).$$

Берутся **конечные или счетные** системы прямоугольников. Если брать в определении не прямоугольники, а элементарные множества, получим то же самое. Возможность выбирать бесконечное покрытие существенна!

3) Внешняя мера σ-аддитивна.

4) Были определены измеримые множества $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$, их мера — это их внешняя мера.

Дальше была поставлена программа: доказать, что множество измеримых подмножеств X образует σ-алгебру $\mathfrak{L}$; что μ — это σ-аддитивная мера на σ-алгебре $\mathfrak{L}$.

Лемма 1-2. $A \in \mathfrak{L} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathfrak{L}, \qquad A_1, A_2 \in \mathfrak{L}, \Rightarrow A_1 \bigcap A_2, A_1 \bigcap A_2 \in \mathfrak{L}$.

Доказали, что измеримые множества образуют алгебру.

Лемма 3. $\forall A, B \in 2^X$: справедливо $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$.

Лемма 4. μ — конечно аддитивна, то есть $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}$ справедливо $\mu\left(A_1 \coprod A_2\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Доказательство. Выберем $B_i \in \mathfrak{A}$: $\mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon$. Так как $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$, то

$$B_1 \bigcap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2) \Rightarrow \mu(B_1 \bigcap B_2) < 2\varepsilon.$$

Это соотношение увидеть легко: если $x \in B_1 \bigcap B_2$ и $x \notin A_i \Rightarrow x \in A_i \triangle B_i$.

Теперь из Леммы 3 следует $|\mu(B_i) - \mu^*(A_i)| < \varepsilon$. Так как на $\mathfrak{A}$ мера аддитивна, то

$$\mu(B_1 \bigcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \bigcap B_2) \geqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) - 4\varepsilon.$$

Теперь заметим, что $(A_1 \coprod A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2)$ (проверяется непосредственно),

$$\text{Из Леммы 3} \Rightarrow \mu^*(A_1 \coprod A_2) \geqslant \mu(B_1 \bigcup B_2) - \mu^*\left((A_1 \coprod A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mu(B_1 \bigcup B_2) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, $\Rightarrow \mu^*(A_1 \coprod A_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, в другую сторону следует из субаддитивности, отсюда чтд.

Лемма 5. $A_n \in \mathfrak{L},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap A_n, \bigcup A_n \in \mathfrak{L}$, то есть сумма и пересечение счетного числа измеримых множеств — измеримые множества.

Доказательство. Докажем $A = \bigcup A_n \in \mathfrak{L}$, для $\bigcap A_n \in \mathfrak{L}$ достаточно воспользоваться

$$\bigcap A_n = X \setminus \bigcup (X \setminus A_n)\,.$$

Положим $A'_1 = A_1,\ A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Ясно, что A'_n — дизъюнктный набор, $\coprod A'_n = A$. В силу конечной аддитивности при каждом n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leqslant \mu^*(A).$$

Поэтому ряд $\sum \mu(A'_n)$ сходится, по признаку Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) :\ \ \forall n > N(\varepsilon)$ справедливо $\sum_{n>N(\varepsilon)} \mu(A'_n) < \varepsilon/2$. Так как $\bigcup_{k=1}^{N} A'_k \in \mathfrak{L}$, то $\exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(B \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{N} A'_k\right)) < \varepsilon/2$. Поскольку $A \triangle B \subset \left(B \triangle \left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} A'_k\right)\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{n>N} A'_n,\right)$, и $\mu^*\left(\bigcup_{n>N} A'_n,\right) \leqslant \sum_{n>N(\varepsilon)} \mu(A'_n)$ (это σ-субаддитивность внешней меры) то $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$ чтд

Лемма 6. μ — σ-аддитивна, то есть для любого дизъюнктного набора $A_n \in \mathfrak{L},\ n \in \mathbb{N}$ справедливо $\mu\left(\coprod A_n\right) = \sum \mu(A_n)$.

Доказательство. $\forall N\ \mu\left(\coprod\limits_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu\left(\coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, поэтому, $\mu\left(\coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, и из субаддитивности (верхней меры, она же обычная) чтд.

Итак, измеримые по Лебегу множества образуют σ-алгебру и мера Лебега σ-аддитивна.

Замечания.

0. Всякое счетное множество измеримо и имеет меру 0.

1. Всякое открытое множество измеримо (каждую точку окружим маленьким открытым прямоугольником с рациональными сторонами и рациональным центром, рассмотрим объединение таких прямоугольников). Рациональных прямоугольников счётное число, а точек - континуум. Значит, хоть один рациональный прямоугольник будет сопоставлен континууму точек. И сколько таких континуум раз посчитанных прямоугольников — не известно, какие-то могут не быть задействованы. Но не беда: возьмём объединение всех рациональных прямоугольников, целиком лежащих в открытом множестве, и всё получается.

2. Всякое замкнутое множество измеримо, напомнить про G_δ, F_σ, они тоже получаются измеримы... и последующие классы тоже.

3. Очевидно, что можно продолжить меру Лебега с квадрата X на всю плоскость.

4. Всякое множество, внешняя мера которого равна 0, измеримо ($\mu^*(A \triangle \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon$). Всякое подмножество множества меры 0 измеримо.

5. Эта мера инвариантна относительно преобразований, не меняющих расстояний. Это теорема. Она следует из формулы для меры повёрнутого прямоугольника. Единственность, если добавить нормировку.

6. Поговорить про другие размерности, про кирпичи в 3D. Пообещать общее описание борелевских мер (не инвариантных относительно сдвигов).

7. Стандартный пример неизмеримого множества на отрезке. Рассказать, что конструктивных примеров нет. Мера на окружности, поговорить, сказать, что надо просто взять меру на полуин-

тервале. Внутри каждого измеримого множества меры > 0 есть неизмеримое подмножество.

Пусть $\mu(A) > 0$ для ограниченного A. Рассмотрим те же наборы рациональных сдвигов. Каждый такой набор либо пересекается с A, либо нет. Возьмем те, которые пересекаются. В них проделаем выбор. Полученное множество не может иметь меру 0: будучи сдвинутым на рациональные числа, покроет всё A, и не может иметь меру > 0, счетное множество сдвигов умещается в ограниченном подмножестве. Значит — не измеримо.

Ту же конструкцию рассказать на плоскости.

8. **Примеры интересных измеримых множеств.**

- Канторово множество нулевой меры. Троичная система. Десятичная система. Подчеркнуть, что концов выкинутых интервалов счетное множество.

  Cantor Middle Third Set. На картинке черное — то, что остается.

  Вообще, пусть выбрасываем на каждом шаге $\alpha \in (0,1)$ от остатка, начиная с единичного отрезка. Тогда мы выбросим весь единичный отрезок:

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)^3 + ... = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$$

  Например, если выбрасывать на каждом шаге все числа, у которых в n-ичной записи хоть один символ принадлежит набору из k символов, тут $\alpha = k/n$. В главном случае $k = 1, n = 3$.

- Канторово множество ненулевой меры. Отметим на $(0,1)$ точки вида $a_n^k = k2^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Рассмотрим интервалы $(a_n^k - \varepsilon 2^{-2n}, a_n^k + \varepsilon 2^{-2n})$. Теперь возьмём и выбросим эти интервалы из $(0,1)$. Общая мера всех выбрасываемых интервалов равна

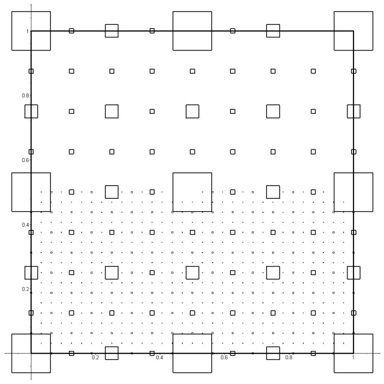
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon 2^{-2n}(2^n - 1) \leqslant 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\varepsilon.$$

  Конечно, они будут перекрываться, поэтому мера остатка будет еще меньше $1 - 2\varepsilon$. Если считать точно, то получится

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon 2^{-2n}(2^{n-1}) = \varepsilon.$$

  очевидно по построению, что в любой окрестности любой точки отрезка всегда будет дырка.

- Выбрасывание окрестностей рациональных чисел. Что от полной меры останется? Как представить себе полученное множество?



В этой ситуации легко посчитать требуемые размеры квадратиков: выкинем менее

$$(2+1)^2\varepsilon^2/2^{2\cdot1+1}+(2^2+1)^2\varepsilon^2/2^{2\cdot2+2}+ \\ +\ldots+(2^n+1)^2\varepsilon^2/2^{2\cdot n+n}$$

Всего выкинем что-то около ε^2.

- Множества на плоскости, имеющие общую границу. 3 множества и ε-сеть.
- 2 множества на плоскости - прямоугольники и граница.

9. Внутренняя мера, $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A)$. Иначе можно сказать, что внутренняя мера — это sup замкнутых внутри. Множество A измеримо, iff $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Особенно хорошо на прямой, где открытые и замкнутые множества сразу измеримы и известна их мера.

На прямой можно делать так. Любое открытое множество — совокупность счетного числа дизъюнктных интервалов (a_n, b_n). Сумма их длин не больше общей длины отрезка. Поэтому мера любого открытого определена. Мера замкнутого тоже определена, как дополнение к открытому. Теперь внешняя мера — это inf по всем объемлющим открытым, внутренняя мера — это sup по всем объемлемым замкнутым. Если внешняя и внутренняя меры совпадают, то множество называется измеримым по Лебегу.

Вопрос: можно ли представить открытое множество на плоскости, как совокупность счетного числа дизъюнктных прямоугольников (можно, сначала рассмотрим все рациональные, потом сделаем дизъюнктизацию)?

10. Напомнить определение пренебрежимого множества: B — *пренебрежимо*, если $\exists A \in \mathbf{\Sigma}$: $A \supset B,\ \mu(A) = 0$. Множество измеримо по Лебегу iff оно есть дизъюнктное объединение множества класса F_σ и пренебрежимого множества. Или G_δ и пренебрежимого. Получается, что хотя борелевские подмножества отрезка и не исчерпываются множествами классов F_σ и G_δ, но они по мере не сильно отличаются от них.

Чтобы доказать, покроем A открытыми B_n, так чтобы $A \subset B_n$ и $\mu(B_n) \leqslant \mu(A) + \frac{1}{n}$. Возьмем пересечение $\bigcap B_n$. Это множество класса G_δ. Если исчерпывать A изнутри замкнутыми множествами, то аналогичная конструкция приведет к множеству F_σ и пренебрежимого.

Лекция 4 (19 ноября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Завершили конструкцию плоской σ-аддитивной меры Лебега;

2) Изучили её свойства.

3) Рассмотрели всякие нетривиальные множества на прямой и на плоскости.

Сегодня мы начнем изучать скалярнозначные функции на прямой.

Многие определения и утверждения справедливы не только на прямой. Иногда буду говорить об этом, иногда не буду.

Измеримые функции. Самые общие конструкции, связь с непрерывностью.

Пусть X и Y — два множества, пусть $\mathfrak{A}_X \in 2^X$, $\mathfrak{A}_Y \in 2^Y$. Функцию $f : X \to Y$ назовем $(\mathfrak{A}_X, \mathfrak{A}_Y)$-измеримой, если $\forall A \subset \mathfrak{A}_Y \Rightarrow f^{-1}(A) \subset \mathfrak{A}_X$.

Например, если f — скалярная функция, а $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{A}_Y$ — это системы всех открытых множеств, то $(\mathfrak{A}_X, \mathfrak{A}_Y)$-измеримость — это непрерывность (в топологических пространствах).

Если $\mathfrak{A}_X \in 2^X$ — это множества с конечным числом элементов, а $\mathfrak{A}_Y \in 2^X$ — это множества из конечного числа промежутков, то $(\mathfrak{A}_X, \mathfrak{A}_Y)$-измеримы ступенчатые функции (те самые, которыми приближали непрерывные функции при построении интеграла Римана).

Не буду говорить об абстрактных примерах, а перейду к измеримым скалярным функциям.

Сейчас буду говорить *множество измеримо*, если оно *локально измеримо*. Если множество измеримо, то это значит, что у него локально "правильная" структура (нет местами жутко устроенных кусков). А за конечностью меры надо дополнительно следить. Естественно, из ограниченности множества следует конечность меры, но не наоборот.

Определение. Функция f называется измеримой (по лебеговой мере μ, будем писать $f \in \mathfrak{L}$), если при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо (по мере μ).

Другое определение. Функция f измерима, если для любого борелевского множества A множество $f^{-1}(A)$ измеримо по Лебегу, можно сказать (L, B)-измерима.

Это одно и то же, в одну сторону очевидно, а в другую нужны дополнительные конструкции. Очевидно, что F_σ и прочее имеет измеримый прообраз, надо дожать до борелевских. В разговорах и обсуждениях буду иногда использовать, а в теоремах постараюсь обойтись.

Не для любого измеримого по Лебегу! Сейчас приведу пример замечательной функции, такой что прообраз измеримого не измерим (в листочках есть про это вопрос!).

Свойства измеримых функций и теоремы о них.

1. Измеримы множества $\{x : f(x) > c\}$, $\{x : f(x) \leqslant c\}$, $\{x : f(x) \geqslant c\}$, $\{x : f(x) = c\}$, $\{x : f(x) \in I\}$, где I — любой конечный интервал.

   $\{x : f(x) \geqslant c\} = \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) < c\} \in \mathfrak{L}$, $\qquad \{x : f(x) \leqslant c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{L}$.

   Измеримы множества $\{x : c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2\}$, $\{x : c_1 < f(x) \leqslant c_2\}$ и т.д.

2. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Тогда $\forall\varepsilon\exists g : [0,1] \to \mathbb{R} : g$ ограниченная и $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Следует из аксиомы Архимеда.

$$A_k = \{x : |f(x)| > k\}, \quad A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset, \qquad \bigcap A_n = \emptyset \Rightarrow \lim \mu(A_n) = 0.$$

Выберем $k : \varepsilon > \mu(A_k)$ и положим $g(x) = f(x),\ x \in [0,1] \setminus A_k,\ g(x) = k\,\mathrm{sign}(f(x)),\ x \in A_k$.

3. Элементарные операции: сумма, разность, произведение измеримых функций — измеримые функции. Частное тоже, если знаменатель не обращается в ноль. Если функция f измеримая, то $|f|$ тоже измеримая.

   Доказательство. $f \in \mathfrak{L} \Rightarrow a + bf \in \mathfrak{L}$ — очевидно. Если $f, g \in \mathfrak{L}$, то

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{x : f(x) > r_k\} \bigcap \{x : g(x) < r_k\}\Big),$$

   где r_k — все рациональные числа, занумерованные каким-то образом. Поэтому множества $\{x : f(x) > a - g(x)\} = \{x : f(x) + g(x) > a\}$ измеримы.

   Произведение: $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$, квадрат измеримой — измерим (явно напишем неравенства.) Дробь $1/f$ измерима — напишем неравенства, разные при $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$.

4. $\min\{f(x), g(x)\},\ \max\{f(x), g(x)\},\ \inf\{f_k(x)\},\ \sup\{f_k(x)\}$ — измеримые функции, так как

$$\{x : \max\{f(x), g(x)\} < c\} = \{x : f(x) < c\} \bigcap \{x : g(x) < c\},$$

$$\{x : \min\{f(x), g(x)\} < c\} = \{x : f(x) < c\} \bigcup \{x : g(x) < c\},$$

$$\{x : \sup\{f_k(x)\} \leqslant c\} = \bigcap \{x : f_k(x) \leqslant c\}.$$

   Это есть в листочках, там еще про $\overline{\lim}\, f_k,\ \underline{\lim}\, f_k$ — это я докажу чуть позже.

5. Непрерывная функция — измерима, так как множества $\{x : f(x) \leqslant c\}$ и $\{x : f(x) \geqslant c\}$ замкнуты $\Rightarrow$ измеримы.

6. **Определение.** Простая функция — измеримая функция с конечным множеством значений. Ступенчатая функция — измеримая функция с конечным или счетным множеством значений.

   Эти функции измеримы, iff измеримы все множества $\{x : f(x) = c\}$.

   В Колмогорове и Фомине простой функцией называется и то, и другое.

   Ограниченная измеримая функция всегда является равномерным пределом последовательности простых функций.

   Для доказательства разобьём $(\inf f - .0001, \sup f]$ на промежутки $(y_i, y_{i+1}]$, считаем, что мелкость $< \varepsilon$. Возьмем функцию, которая на множестве $\{x : x \in (y_i, y_{i+1}]\}$ принимает значение y_i. Очевидно, такая функция простая и равномерно отстоит от исходной не более чем на ε. Выберем последовательность $\varepsilon \searrow 0$, получим искомую последовательность.

От тех функций, которые рассматривались на 1 курсе, эти отличаются тем, что множества постоянства у них не промежутки!

Измеримая функция всегда является равномерным пределом последовательности ступенчатых функций.

Всё то же самое, только надо разбивать ось на счётное количество промежутков.

Далее мы будем приближать непрерывные функции, измеримые функции ещё всякими: тригонометрическими многочленами, обычными многочленами. Но это потом.

7. Если функция измерима на некотором измеримом множестве, то она измерима и на любом его измеримом подмножестве. Если функция измерима на двух дизъюнктных множествах, то она измерима и на объединении этих множеств.

8. **Борелевская σ-алгебра** — это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества. Её элементы — борелевские множества. Не все измеримые множества, даже меры 0, являются борелевскими.

   Функция f называется **измеримой по Борелю**, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого борелевского множества A вещественной оси снова является борелевским множеством. Не просто измерим — как у просто измеримой функции — а именно борелевский.

   Любое подмножество множества нулевой меры автоматически измеримо по Лебегу, но может не быть борелевским.
   Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}(x+c(x))$ на отрезке $[0, 1]$, где $c(x)$ — канторова лестница. Эта функция монотонна и непрерывна, как следствие — измерима. Мера образа канторова множества равна $\frac{1}{2}$, а значит, мера образа его дополнения также равна $\frac{1}{2}$. Поскольку мера образа канторова множества ненулевая, в нём можно найти неизмеримое множество A. Тогда его прообраз $f^{-1}(A)$ будет измеримым (так как он лежит в канторовом множестве, мера которого нулевая), но не будет борелевским (поскольку иначе A было бы измеримо как прообраз борелевского множества при измеримом (непрерывном) отображении c^{-1}).

9. **Сложная функция.** Измеримая по Борелю f функция от измеримой — измеримая функция. Это очевидно: пусть есть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская, и $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — измеримая. Возьмем борелевское множество A, его прообраз $f^{-1}(A)$ тоже борелевский по определению измеримости по Борелю функции f, поэтому прообраз $x^{-1}(f^{-1}(A))$ измерим по Лебегу, по определению измеримости по Лебегу функции x. Теперь по определению сложная функция $f(x(\cdot))$ измерима.

   Это важно: оператор $x(t) \mapsto f\big(x(t)\big)$ должен действовать в функциональном пространстве измеримых функций. Например, если f непрерывна, то оператор (называется *оператор суперпозиции*, иногда *оператор Немыцкого*) действует в C.

10. **Рассуждения, которые точно можно не слушать!**

Рассказать, что для функций $f(t,x(t))$ все не просто. Суперпозиционная измеримость (СИ). Условия Каратеодори (непрерывность по x почти при каждом t и измеримость по t при каждом x). Точечный предел СИ функций — СИ функция. Непрерывные и измеримые по Борелю функции $f(x)$ — СИ функции.

Уродцы. Назовем функцию $f(t,x):[0,1]\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$ *уродцем*, если
1) при каждой измеримой $x(t)$ функция $f(t,x(t))$ почти всюду равна 0,
2) при каждом фиксированном $t=t^*\in[0,1]$ равенство $f(t^*,x)=0$ выполнено не более чем при счетном множестве значений x.

Теорема. Если выполнена континуум-гипотеза, то уродцы существуют.
Каждый уродец СИ, хотя как функция двух переменных он не измерим.

Добавление. Условие Каратеодори обеспечивает непрерывность оператора суперпозиции по мере. Если выполнено условие Каратеодори и оператор суперпозиции действует из L^p в L^q, (например, $|f(t,x)|\leqslant k|x|+c$ обеспечивает действие в L^p), то он непрерывен в L^p.

11. Поточечные пределы. **Теорема.** $f_n\in\mathfrak{L},\ f_n\to f\Rightarrow f\in\mathfrak{L}$. Следует из соотношения

$$\{x:f(x)<c\}=\bigcup_k\bigcup_n\bigcap_{m>n}\{x:f_m(x)<c-\frac{1}{k}\}. \tag{1}$$

и того, что измеримые множества образуют σ-алгебру.

Доказательство соотношения (1)**.**

1) $x\in\{x:f(x)<c\}\Rightarrow\exists k:\ f(x)<c-\frac{2}{k}$. При этом x справедливо $f_m(x)\to f(x)$. По k построим n такое, что $|f_m(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$ при всех $m>n$. Из $|f_m(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$ и $f(x)<c-\frac{2}{k}$ следует $x\in\bigcap_{m>n}\{x:f_m(x)<c-\frac{1}{k}\}$ при этих k и n.

2) Теперь пусть $x\in\bigcup_k\bigcup_n\bigcap_{m>n}\{x:f_m(x)<c-\frac{1}{k}\}$. Тогда при некоторых k и n верно включение $x\in\bigcap_{m>n}\{x:f_m(x)<c-\frac{1}{k}\}$. Перейдем к пределу по m и получим $f(x)\leqslant c-\frac{1}{k}$.

12. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{m\geqslant n}a_m,\ \ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{m\geqslant n}a_m$. Из измеримости супремума-инфимума следует измеримость функций $g_n(x)=\sup\limits_{m\geqslant n}f_m(x),h_n(x)=\inf\limits_{m\geqslant n}f_m(x)$, из измеримости предела следует измеримость верхнего предела.

Лекция 5 (26 ноября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Начали изучать измеримые функции;

2) Увидели, что разные разумные операции (элементарные преобразования, поточечный предел, инфимум-супремум) не выводят из класса измеримых функций;

3) Поговорили, когда оператор суперпозиции не выводит из класса измеримых функций (измеримость сложной функции);

4) Привели пример неборелевского множества меры 0.

5) Отдельно подчеркну 2 важные теоремы с прошлой лекции: 1) поточечный предел последовательности измеримых функций измерим, 2) $\lim \mu(x : |f(x)| > n) = 0$.

14. Классы эквивалентности ($f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$). Очевидно, все функции одного класса одновременно измеримы.

    В некоторых классах есть непрерывные функции, в некоторых - нет. Если есть непрерывная, то одна.

    Классы все не менее, чем континуальны: можно изменить значение в одной точке.

15. Термин "*почти всюду*" (свойство E выполнено почти всюду на X, если свойство выполнено всюду кроме множества меры 0). Обращение: что значит "не почти всюду" и что значит "почти всюду не". Неравенство почти всюду $f(x) \overset{a.e.}{\geqslant} g(x)$ или $f(x) \geqslant g(x)$ *a.e.*, равенство почти всюду $f(x) \overset{a.e.}{=} g(x)$ или $f(x) = g(x)$ *a.e.*,

16. Сходимость почти всюду $f_n(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$ или $f_n(x) \to f(x)$ *a.e.*

    Теорема. $f_n \in \mathfrak{L}$, $f_n \overset{a.e.}{\to} f \Rightarrow f \in \mathfrak{L}$. Следует из пункта 11.

17. **Теорема Егорова (1911).** Если $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, то на множестве чуть меньшей меры $f_n \rightrightarrows f$:

    $$f_n \overset{a.e.}{\to} f \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists E_\delta \subset X: \text{ справедливо } \mu(E_\delta) > \mu(X) - \delta, \text{ и } f_n \rightrightarrows f \text{ на } E_\delta).$$

    Доказательство. $f \in \mathfrak{L}$. Положим $E_n^m = \bigcap\limits_{i \geqslant n} \{x : |f_i(x) - f(x)| < \dfrac{1}{m}\}$ и $E^m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^m$. Очевидно, $E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \ldots$ По теоремам о непрерывности меры $\forall m \in \mathbb{N}, \delta > 0\ \exists n_0(m):$ справедливо $\mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta/2^m$. Положим $E_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}$ и докажем, что E_δ удовлетворяет условиям теоремы Егорова. Сначала докажем равномерную сходимость на E_δ:

    $$x \in E_\delta \Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)} \Rightarrow \forall m \text{ справедливо } |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \text{ при } i > n_0(m).$$

    Осталось оценить $\mu(X \setminus E_\delta)$. Сначала заметим, что $\forall m$ справедливо $\mu(X \setminus E^m) = 0$: действительно, $x_0 \in X \setminus E^m \Rightarrow |f_i(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m}$ при сколь угодно больших i, то есть $f_n(x_0) \not\to f(x_0)$.

Поэтому $\mu(X \setminus E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta/2^m$ и, теперь,

$$\mu(X \setminus E_\delta) = \mu\left(X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(X \setminus E^m_{n_0(m)}\Big)\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\mu\Big(X \setminus E^m_{n_0(m)}\Big) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^m} = \delta \text{ чтд}$$

18. **Сходимость по мере:** $f_n \xrightarrow{\mu} f \;\Leftrightarrow\; \forall \sigma > 0$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}) = 0.$

Предел по мере измерим. Мы это пока что будем считать выполненным, а потом получим в качестве выхода из теоремы. Считаем, что множества $\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$ измеримы.

Единственность предела по мере: если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$, то $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Покажем, предположив, что f и g измеримы, от противного: пусть $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \neq 0$, тогда $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| > \sigma\}) > \varepsilon$ при некоторых $\sigma, \varepsilon > 0$. Это всё справедливо, так как

$$\mu(\{x : h(x) \neq 0\}) = \mu(\bigcup\{x : \frac{1}{n+1} < |h(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}) \neq 0 \Rightarrow \exists n : \mu(\{x : \frac{1}{n+1} < |h(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}) > 0.$$

Это противоречит формулам:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \mu(\;\{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\{x : |f(x) - g(x)| > \sigma\} \subset \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}\bigcup\{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}$$

19. **Теорема.** $\mu(X) < \infty$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доказательство. Предельная функция измерима, следует из пункта 11. Без ограничения общности считаем, что сходится поточечно везде.

Положим $E_k(\sigma) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$, $R_n(\sigma) = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma)$, $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma)$. Все эти множества измеримы. Так как $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$, то в силу непрерывности меры

$$\lim_{n\to\infty}\mu(R_n(\sigma)) = \mu(M).$$

Покажем, что $M = \emptyset$. От противного, пусть $x_0 \in M$. Так как $f_n(x_0) \to f(x_0)$, то для данного $\sigma > 0$ $\exists n$ $\forall k \geqslant n$ справедливо $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma$, то есть $x_0 \notin R_n(\sigma) \Rightarrow x_0 \notin M$.

Следовательно, $\mu(R_n(\sigma)) \to 0$, из $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$ чтд.

20. **Контрпримеры**

1. Контрпример к $\boldsymbol{\mu(X) < \infty}$. Пусть $X = \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = 0,\ |x - n| < 1;\ f_n(x) = 1,\ |x - n| \geqslant 1.$ Тогда $f_n \to 0$, но не по мере: $\mu(\{x : |f_n(x)| > \frac{1}{2}\}) = 2$.

2. Контрпример к обратному утверждению.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ на $(0, 1]$ определим функции $f_1^k, f_2^k, \ldots, f_k^k$ следующим образом:

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{i-1}{k} < x \leqslant \frac{i}{k}; \\ 0, & \text{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Последовательность $f_1^1,\ f_1^2, f_2^2,\ f_1^3, f_2^3, f_3^3,\ f_1^4, \ldots \xrightarrow{\mu} 0$, но не сходится ни в одной иррациональной точке ($\mu(\{x : |f_i^k(x)| > \sigma)\} = \frac{1}{k}$).

21. **Почти обратная теорема (Теорема Рисса)**: из сходимости по мере следует сходимость подпоследовательности почти всюду.

    Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $f_n \to f$ (а не $f_n \xrightarrow{\mu} f$). Зафиксируем $\varepsilon_n \searrow 0, \eta_n \searrow 0, \sum \eta_n < \infty$. Построим монотонную $n_k \in \mathbb{N}$:

    $$\mu\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k$$

    (по очереди, сначала n_1, потом $n_2 > n_1$ etc). Это можно сделать в силу $\xrightarrow{\mu}$. Покажем, что $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$. Положим $R_i = \bigcup\limits_{k=i}^{\infty}\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\},\ Q = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} R_i$. Теперь $R_i \supset R_{i+1}$, в силу непрерывности меры $\lim \mu(R_i) = \mu(Q)$, но $\mu(R_i) < \sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k \to 0$ из-за $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty \Rightarrow \mu(Q) = 0$. Осталось проверить, что $x_0 \in (X \setminus Q) \Rightarrow f_n(x_0) \to f(x_0)$.

    Пусть $x_0 \notin Q \Rightarrow \exists i_0 : x_0 \notin R_{i_0} \Rightarrow \forall k \geqslant i_0$ справедливо $x_0 \notin \{x : |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_k\} \Rightarrow |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$ чтд

22. **Измеримость предела по мере.** Функция, являющаяся пределом по мере, стала поточечным пределом, про него известно, что он измерим. В доказательстве не использовалась измеримость предельной функции, а только измеримость множеств $\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$. Их измеримость явно предполагается.

Можно сделать "честную" конструкцию. Ввести определение фундаментальности по мере:

$\forall \sigma, \varepsilon > 0\ \ \exists N : \forall n, m > N$ справедливо $\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \sigma\}) < \varepsilon$.

Фундаментальность сходящейся по мере последовательности очевидна.

Теорему Рисса можно изменить так. Пусть f_n фундаментальна по мере. Тогда у нее есть подпоследовательность, сходящаяся почти всюду, к её пределу (который измерим!) последовательность сходится по мере.

Лекция 6 (03 декабря 2012)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Продолжили изучение измеримых функций;

2) Ввели сходимость по мере;

3) Разобрали теорему Егорова: из сходимости почти всюду следует равномерная сходимость на множестве чуть меньшей меры;

4) Из сходимости почти всюду следует сходимость по мере; их сходимости по мере следует существование подпоследовательности, сходящейся почти всюду (это теорема Рисса).

На этой лекции у нас в плане теорема Лузина, эквивалентные определения измеримости функций, приближения измеримых функций разными попроще.

Возможно, мы начнем изучение интегралов Римана и Лебега.

23. **Теорема Лузина (1913):**

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi(x) \in C[a,b]$: справедливо $\mu(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$.

Это единственная теорема, которая именно для отрезка. Все предыдущие теоремы про поточечную сходимость, про сходимость по мере были для скалярнозначных функций, но определенных на некотором множестве с мерой.

Почти обратная теорема.
Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi(x) \in C[a,b]$: справедливо $\mu^*(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$, то f измерима.
Доказательство обратной теоремы: выберем $\varepsilon_n \searrow 0$, построим по условию φ_n. По условию, φ_n непрерывны и фундаментальны по мере, так как из $\mu^*(\{x : f(x) \neq \varphi_n(x)\}) < \varepsilon_n$, $\mu^*(\{x : f(x) \neq \varphi_m(x)\}) < \varepsilon_m$ следует $\mu(\{x : \varphi_m(x) \neq \varphi_n(x)\}) < \varepsilon_n + \varepsilon_m$ и, тем более, $\mu(\{x : |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| > \sigma\}) < \varepsilon_n + \varepsilon_m$ при любом $\sigma > 0$.
Поэтому по теореме Рисса (переформулированной для фундаментальных по мере последовательностей) можно выбрать подпоследовательность, которая сходится почти всюду. Ясно, что предел совпадает с f чтд.

Доказательство

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \in \mathfrak{L}$. Всегда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ g \in \mathfrak{L},\ |g| \leqslant c :$ справедливо $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Для доказательства рассмотрим срезку $f_n(x) = f(x),\ |f(x| \leqslant n,\ f_n(x) = n,\ |f(x| > n$. Так как $\mu(\{x : |f(x)| > n\}) \to 0$, то в качестве g можно взять одну из срезок f_n с достаточно большим n.

2) Пусть $M_k \subset [0,1], M_k = \overline{M}_k,\ k = 1, \ldots, n$ — дизъюнктный набор замкнутых множеств. Пусть $f : \coprod_{k=1}^n M_k \to \mathbb{R},\ \forall k$ справедливо $f(x) = c_k,\ x \in M_k$. Тогда $f \in C\left(\coprod_{k=1}^n M_k\right)$.

3) $M = \overline{M} \subset [0,1],\ f \in C(M)$. Тогда $\exists g \in C[0,1] : x \in M \Rightarrow f(x) = g(x)$, $\sup_M |f| = \sup_{[0,1]} |g|$. Достаточно положить на интервалах, составляющих открытое множество $[0,1] \backslash M$, в качестве g линейную функцию.

4) **Теорема Бореля.** $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{L}$. $\forall \delta, \varepsilon > 0\ \exists g \in C[0,1] : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$. Если f ограничена, то можно выбрать $g :\ \sup|g| \leqslant \sup|f|$.

Пусть f ограничена. Зафиксируем δ, ε. Разобьем промежуток $[\inf f, \sup f]$ на N маленьких промежуточков $\Delta_n = [y_n, y_{n+1})$, $|y_{n+1} - y_n| < \delta$. Рассмотрим измеримые множества $K_n = \{x : f(x) \in \Delta_n\}$. Множества измеримы и дизъюнктны. Выберем внутри каждого по замкнутому подмножеству M_n близкой меры $\mu(K_n \setminus M_n) < \varepsilon/N$ и там положим $f(x) = y_n$. Потом достроим её до непрерывной везде по предыдущим леммам.

5) Для любой измеримой функции существует последовательность непрерывных функций, сходящихся к ней по мере.

Выберем $\varepsilon_n \searrow 0, \delta_n \searrow 0$, по теореме Бореля построим f_n, это искомая последовательность.

6) Теперь выберем по теореме Рисса подпоследовательность (см. предыдущий пункт!) $\Rightarrow$

Теорема Фреше. Для любой измеримой функции существует последовательность непрерывных функций, сходящихся к ней почти всюду.

7) Отсюда докажем теорему Лузина. Возьмем по теореме Фреше последовательность $f_n \stackrel{a.e.}{\to} f$, потом по теореме Егорова выберем множество близкой меры, на котором $f_n \rightrightarrows f$, потом выберем замкнутое близкой меры, на нем сходится равномерно, значит сходится к непрерывной, потом продолжим до всего промежутка.

24. На прошлой лекции было дано основное определение измеримой функции: измеримость множеств $\{x : f(x) < c\}$ при всех c. Было декларировано, что это то же самое, что прообраз любого борелевского множества (а не только всякие интервалы) измерим по Лебегу. Задача из листочка.

Сейчас как раз время подчеркнуть, почему нет смысла рассматривать Лебег–Лебег-измеримые функции. Был пример (полусумма канторовой лестницы $c(x)$ и x) непрерывного строго монотонного отображения, у которого неизмеримое множество преобразовывалось в неборелевское множество меры 0 (естественно, измеримое!). То есть, даже не все непрерывные функции Лебег–Лебег-измеримы. Именно поэтому рассматриваются Лебег–Борель-измеримые функции.

Была показано, что всякую измеримую функцию можно приблизить равномерно измеримой ступенчатой (не более счетного числа значений, все соответствующие множества измеримы). Было показано, что поточечные или поточечные почти всюду (тем более — равномерные) пределы последовательностей измеримых функций измеримы.

Таким образом, можно дать и такое эквивалентное определение измеримой функции: измеримая функция это та, которую можно приблизить (равномерно или поточечно или почти всюду) последовательностью ступенчатых или простых функций.

Если дать такое определение, то очень удобно доказывать громоздкую теорему об измеримости суммы двух функций и некоторые другие. Далее, именно с помощью такого определения будем вводить интеграл Лебега.

Теперь можно ещё по-другому. Пусть ступенчатые функции будут как на 1м курсе, с отрезочками, конечное число ступенек. Можно и ими приблизить измеримую функцию, но только почти всюду.

В одну сторону это следует из теоремы Фреше (см. док-во теоремы Лузина) и из того, что каждую непрерывную можно равномерно приблизить ступенчатой (1й курс). Каждую из непрерывных функций $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, равномерно приблизим ступенчатой φ_n с точностью $\varepsilon_n \searrow 0$.

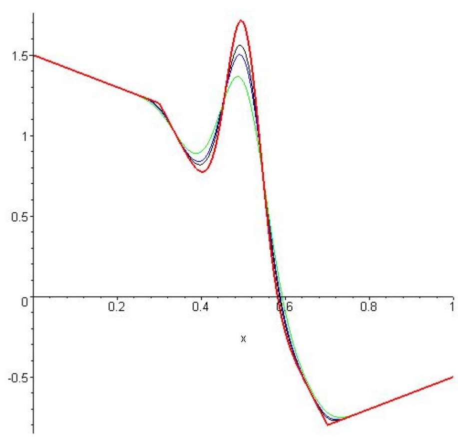
В другую — из ранее доказанных теорем (ступенчатые функции измеримы, предел почти всюду последовательности измеримых функций — измерим).

Это по духу сопоставимо с приближением непрерывных функций из 1-го курса и некоторых других, интегрируемых по Риману (не всех).

25. Теперь сформулируем без доказательства теорему о многочленах Бернштейна:

$$f \in C[0,1],\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Теорема Бернштейна. $B_n \rightrightarrows f$ на $[0,1]$.



$$f(x) = -2|x-.3| + 3|x-.7| + 1.5e^{-300(x-.5)^2}$$

Красный цвет — это график f, остальные графики — многочлены Бернштейна при $n = 200, 400, 600$.

Для картинки выбрана функция с парой изломов и резким колебанием.

Очевидный аналог для любого $[a,b]$.

Конкретный вид многочленов Бершнтейна роли может быть и не играет... Важен сам факт, что какими-то многочленами можно равномерно на любом конечном отрезке приближать любые непрерывные функции. То, что функции очень гладкие (аналитические) можно приближать частичными суммами ряда Тейлора, не представляется странным, видим, что любые непрерывные можно.

Теорема Вейерштрасса 1. $f \in C$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ многочлен $P(x) : |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Эту теорему потом докажем по-другому. Теоремы Бореля и Фреше можно переписать.

Теорема Фреше′. Для любой измеримой функции существует последовательность многочленов, сходящихся к ней почти всюду.

Теорема Бореля′. $f \in \mathfrak{L},\ \forall \delta, \varepsilon > 0\ \exists$ многочлен $P(x) : \mu(\{x : |f(x) - P(x)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$.

Теорема Вейерштрасса 2. $f \in C,\ f(0) = f(2\pi)$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ тригонометрический многочлен $T(x) : |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Следует из теоремы Вейерштрасса 1 и $|f(\arccos y) - P(y)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Эти теоремы не доказаны так как мы опустили доказательство теоремы Берштейна. Теоремы Вейерштрасса потом в будущем получатся в качестве следствия из теорем о рядах Фурье и ядрах Фейера.

Интеграл Римана

На первом курсе давалось такое определение интеграла по Риману. Есть разбиение основного отрезка на конечное число промежутков. Функция, принимающая на этих промежутках постоянные значения, называется ступенчатой функцией. Интеграл от ступенчатой функции определяется естественно.

Есть ограниченная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (не обязательно непрерывная). Разбиение Δ отрезка точками $x_1, < \ldots, x_{n-1},\ a = x_0, b = x_n$. Мелкость разбиения:

$$\lambda(\Delta) = \inf\{x_k - x_{k-1},\ k = 1, \ldots, n\}.$$

По каждому разбиению Δ строим суммы Дарбу, верхнюю $d^*(\Delta)$ и нижнюю $d_*(\Delta)$:

$$d^*(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{t \in (x_{k-1}, x_k]} f(t)\Big)(x_k - x_{k-1}), \qquad d_*(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{t \in (x_{k-1}, x_k]} f(t)\Big)(x_k - x_{k-1}),$$

очевидно, при любой f и любом разбиении Δ справедливо $d_*(\Delta) \leqslant d^*(\Delta)$.

Если измельчать разбиение (добавлять новые точки), то верхние суммы уменьшаются, нижние увеличиваются. Теперь положим $I^* = \inf_\Delta d^*(\Delta),\ I_* = \sup_\Delta d_*(\Delta)$, верхний интеграл и нижний интеграл. Всегда $I^* \geqslant I_*$.

Определение: Функция f называется интегрируемой по Риману, если $I^* = I_*$.

Равенство $I^* = I_*$ выполнено, если $\sum w_n |\Delta_n| \to 0$, где w_n — колебание на отрезке Δ_n.

Почти такое же определение: Пусть есть разбиение Δ, на каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ (или $[x_{k-1}, x_k)$) выберем точку ξ_k и рассмотрим интегральную сумму

$$S(\Delta, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad \text{Рассмотрим величину} \quad I = \lim_{\lambda(\Delta) \to 0} S(\Delta, \xi_k).$$

Если предел существует, то I — это интеграл Римана.

Что это такое “предел интегральных сумм при мелкости, стремящейся к нулю”?

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \Delta : \lambda(\Delta) < \delta, \forall \xi_k \ \text{ справедливо } \ |I - S(\Delta, \xi_k)| < \varepsilon.$$

Для $f \in C$ есть связь между таким определением и определением со ступенчатыми функциями.

1) Интеграл ступенчатой (настоящие ступеньки) функции определить легко.

2) Пусть функция f такова, что её можно равномерно приблизить ступенчатыми функциями. Тогда её интеграл равен пределу интегралов ступенчатых функций. Корректность определений надо проверить (разные приближения приводят к одному результату и пр.).

Непрерывные функции приближаются ступенчатыми функциями:

$$f^*(x) = \sup_{t\in(x_{k-1},x_k]} f(t),\ x \in (x_{k-1}, x_k] \ \geqslant\ f(x)\ \geqslant\ f_*(x) = \inf_{t\in(x_{k-1},x_k]} f(t),\ x \in (x_{k-1}, x_k].$$

Было бы приятно, если бы все интегрируемые по Риману функции были бы равномерными пределами ступенчатых функций... Однако это не так. Пример: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на $(0,1]$, $f(0) = 0$. Эта функция интегрируема по Риману на $[0,1]$, однако равномерно её приблизить нельзя — в нуле проблемы.

Теорема (Лебег). Ограниченная функция на отрезке интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ почти всюду непрерывна.

Далее будет дано полноценное доказательство.

Интеграл Лебега

Интеграл Лебега также может быть введен различными способами. Основных способов снова два — через интегральные суммы и через равномерные пределы ступенчатых функций, но нового вида: как функций, принимающих конечное или счетное количество значений, но множества постоянства не обязательно промежутки, а любые измеримые множества.

Способ 1. Пусть функция f измерима на отрезке $[a,b]$ и пусть она ограничена: $f(x) \in [A,B)$ при $x \in [a,b]$. Разобьем отрезок $[A,B]$ на маленькие отрезочки точками $y_0 = A < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B$, а потом составим интегральные суммы Лебега

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(\{x \in [a,b] : f(x) \in [y_{k-1}, y_k)\}), \qquad s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(\{x \in [a,b] : f(x) \in [y_{k-1}, y_k)\}).$$

Если мелкость разбиения равна λ, то, очевидно, $S - s \leqslant \lambda(b-a)$. При добавлении новых точек разбиения нижняя сумма возрастает, верхняя сумма уменьшается. Супремум нижних сумм равен инфимуму верхних и называется интегралом Лебега.

Обозначение: $$\int_A f(x)dx, \qquad \int_A f(x)d\mu, \qquad \int_A f(x)d\mu(x).$$

Если функция не ограничена, то можно сделать такие же суммы, Но теперь уже может оказаться, что соответствующие ряды расходятся. Тогда может оказаться, что $S = +\infty$ или $s = -\infty$.

Ну и снова нужно потребовать абсолютной сходимости возникающих рядов. Или вообще, все для положительных функций рассматривать.

Эта конструкция часто рассматривается сначала для ограниченных функций, а потом все отдельно доказывается для неограниченных интегрируемых функций. Переход от ограниченных измеримых функций к неограниченным осуществляется с помощью специальной конструкции, срезок функций.

Лекция 7 (10 декабря 2012)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Завершили изучение измеримых функций отдельно от интеграла Лебега: доказали теорему Лузина, по дороге доказали теоремы Бореля и Фреше.

2) Сформулировали эквивалентные определения измеримых функций. Именно поэтому нужно было такое определение — Борель-Лебег-измеримых. Именно поэтому класс измеримых функций такой важный и правильный.

3) Сформулировали теоремы Бернштейна и Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций. Соответственно, сформулировали ещё несколько вариантов эквивалентных определений измеримых функций.

4) Чуть-чуть поговорили о интеграле Римана, напомнил определение, сформулировал теорему Лебега (критерий интегрируемости по Риману), пообещал её доказать позже.

5) Начали говорить об интеграле Лебега: дал определение через интегральные суммы. Рассказал, почему интеграл существует для любой измеримой ограниченной функции.

На этой лекции у нас в плане интеграл Лебега, основное изложение.

Буду вольно пользоваться словами “ступенчатая функция”: буду называть так и настоящие ступенчатые функции “из 1го курса”, с конечным множеством ступенек-промежутков, и ступенчатые функции — измеримые с не более чем счетным множеством значений, где условные ступеньки размазаны по множеству.

Как-то я явно не сформулировал очень простую теорему, важную сейчас.

Теорема. Ступенчатая функция f (т.е. принимающая счетное множество значений y_n) измерима iff каждое множество $\{x : f(x) = y_n\}$ измеримо.

Предполагаю, что множества “на оси абсцисс” имеют конечную меру. Про бесконечную меру (например, про $\int_{\mathbb{R}+}$) — будет отдельный разговор.

Способ 2 (основной). Ступенчатая функция - функция с не более чем счетным множеством значений: пусть A — измеримое множество, имеет вид $A = \coprod_k A_k$, где все A_k также измеримы, их количество конечно или счетно. Это измеримая функция, легко проверить по определению.

Введем интеграл от ступенчатой функции естественным способом. Пусть $f(x) = y_k$ при $x \in A_k$. Тогда

$$\int_A f(x)dx = \sum_k y_k \mu(A_k).$$

Если ряд в правой части абсолютно сходится, то ступенчатая функция f называется интегрируемой (или суммируемой) на A.

Обозначения (для ступенчатой или нет): $\displaystyle\int_A f(x)dx,\ \int_A f(x)d\mu,\ \int_A f(x)d\mu(x).$

Обсудить, почему требуется абсолютная сходимость? Потому что иначе перестановками слагаемых можно получить любую сумму (по теореме Римана об условно сходящихся рядах).

Объяснить, что уже тут появляются ступенчатые (с настоящими ступеньками) функции, которые естественно считать интегрируемыми по Риману, но которые не интегрируемы по Лебегу.

Пример. Пусть $\Delta_n = (2^{-n+1}, 2^{-n}]$, $n = 2, 2, \ldots$ — последовательность дизъюнктных промежутков, которые сходятся к нулю в естественном смысле. Теперь пусть $f_n(x) = (-1)^n\, 2^n/n$. Несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 f(x)dx\,dx \qquad \text{эквивалентен ряду} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

то есть он сходится, но не абсолютно. Соответственно по Лебегу f не интегрируема.

Можно считать, что все y_k различны, а можно и не считать так. Но тогда счетность количества множеств на оси абсцисс всегда предполагается.

Пример неограниченной интегрируемой ступенчатой функции.

Берем счетное множество точек x_n на оси абсцисс. Например, точки вида $x_m^k = (2k-1)2^{-m}$. Окружаем по очереди каждую из них окрестностью диаметра 2^{-2m}. Всего будет примерно Общая мера окрестностей (связанных с x_m^k) будет не больше 2^{-m}. Пронумеруем как-то все точки-окрестности. Теперь положим на первой окрестности $f(x) = m$. Пусть мы определили функцию на окрестностях до номера n. Берем окрестность $n+1$, если для каких-то точек этой окрестности функция уже определена, то на них не обращаем внимание, а если на каких-то не определена, то кладем $f = m$. Так мы определим функцию на открытом множестве не очень большой меры, на оставшемся канторовом множестве положим $f = 0$. Это будет ступенчатая интегрируемая функция. В любой окрестности любой точки канторова множества положительной меры f принимает сколь угодно большие значения.

Естественно, если каждое y_k встречается по одному разу, то можно написать

$$\int_A f(x)dx = \sum_k y_k \mu(\{x : x \in A,\ f(x) = y_k\}).$$

Лемма. Так тоже можно задать интеграл ступенчатой функции.

Свойства интеграла от измеримой ступенчатой функции:

1. Все равно, какие множества брать, считать ли что на всех ступеньках значения одинаковы.
2. Линейность (аддитивность и однородность по функции):

$$\int_A (f(x)+g(x))dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx, \qquad \int_A kf(x)dx = k\int_A f(x)dx.$$

3. Теорема о среднем для ограниченных функций:

$$\mu(A)\inf f \leqslant \int_A f(x)dx \leqslant \mu(A)\sup f.$$

4. Мажорантный признак: если ступенчатая $g \geqslant 0$ интегрируема, то и всякая ступенчатая f, такая что $|f| \leqslant g$, тоже интегрируема.

Очевидно.

Следующий шаг: для измеримой функции берем последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящуюся к f. Если ступенчатые функции интегрируемые (ряды абсолютно сходятся!), то предел интегралов от ступенчатых функций называется интегралом от f.

Определение. Измеримая функция называется суммируемой или интегрируемой, если существует последовательность суммируемых ступенчатых, равномерно сходящаяся к ней.

Пример измеримой несуммируемой функции: $f(x) = 1/x$ на $(0,1]$.

Для корректности такого определения надо проверить 3 момента.

1. Если f_n — ступенчатые интегрируемые функции и $f_n \rightrightarrows f$, то последовательность $\lim \int_A f_n(x)dx$ сходится.

2. Если есть две последовательности, равномерно сходящиеся к f, то результат получится один и тот же.

3. Для ступенчатой функции это одно и то же.

Пункт 1 следует из критерия Коши и теоремы о среднем:

$$\left|\int_A f_n dx - \int_A f_m dx\right| \leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Пункты 2 и 3 очевидны.

Замечательно, что интеграл Лебега от любой измеримой ограниченной функции существует.

Почему эти 2 подхода дают одно и то же число. Я бы сказал, это очевидно для ступенчатых функций, поэтому и для обычных тоже.

Агитационное сравнение интегралов Римана и Лебега.

0) Обозначение — то же самое, обычно из контекста ясно. Если хотят подчеркнуть различие, то придумывают своё обозначение. Если пишут $\int_{[a,b]}$ или $\int_A$ — скорее всего, это интеграл Лебега.

1) Интеграл Лебега от более широкого класса функций, причем существенно! Интеграл Римана не существовал либо, если у функции было слишком много точек разрыва, либо если она была неограничена и где-то слишком быстро стремилась к бесконечности. Интеграл Лебега не существует либо, если функция неизмерима, либо если она неограничена и (также!) где-то слишком быстро стремилась к бесконечности.

2) Интеграл Римана по ориентированному множеству, интеграл Лебега по построению — по неориентированному.

3) Если f ограничена и интеграл Римана существует, то существует и интеграл Лебега, причем он равен интегралу Римана — это будет строго доказано.

4) Все основные формулы для интеграла Лебега сохраняются, про основную формулу Ньютона–Лейбница будет подробный длинный разговор. В частности, для обычной канторовой лестницы $c(x)$ почти всюду существует производная $c'(x) \overset{a.e.}{=} 0$. Естественно, $\int_{[0,1]} c'(x)dx \neq c(1) - c(0)$.

5) Представим себе функцию $[a, b] \to X$, где X — какое-то линейное пространство, например, плоскость. Или функциональное пространство. Интегральные суммы по Риману — никаких проблем. Интегральные суммы по Лебегу непонятно как составлять. И наоборот. В одних пространствах естественно определены меры, в других — метрики.

6) Важное: измеримые функции можно интегрировать (по Лебегу) по любому измеримому множеству, отличному от промежутка.

Свойства интеграла Лебега на множестве конечной меры (на ограниченном множестве).

1. Теорема о среднем: если $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $x \in E$, то $A\mu(E) \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant B\mu(E)$.

2. Конечная аддитивность по множеству (все множества измеримы):

$$E = \coprod_k E_k \Rightarrow \int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

Следует из аддитивности меры и определения.

3. Если f интегрируема на A, то она интегрируема на любом измеримом множестве $B \subset A$.

Следует из аналога для ступенчатых функций и определения, для ступенчатых функций это верно, так как $B \subset A \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in A : f(x) = y_k\}) \geqslant \mu(\{x \in B : f(x) = y_k\}) \quad \Rightarrow$

$$\sum_n |y_k|\mu(\{x \in A : f(x) = y_k\}) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n |y_k|\mu(\{x \in B : f(x) = y_k\}) < \infty.$$

4. Линейность по функции: аддитивность для любых ограниченных измеримых f и g:

$$\int_E (f(x) + F(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E F(x)dx$$

и однородность по функции:

$$\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx$$

Свойства следуют из аналогичного свойства для ступенчатых функций.

5. Монотонность: если f измерима, $|f| \leqslant g$ и g интегрируема, то f интегрируема и

$$\int_E |f(x)|dx \leqslant \int_E g(x)dx.$$

Интегрируемость: из интегрируемости g следует интегрируемость $g+1$. Теперь приблизим ступенчатыми функциями s_f^n и s_{g+1}^n функции f и $g+1$ с точностью до $\varepsilon_n \in (0, 1/3)$. Теперь $|s_f^n| < s_{g+1}^m$, отсюда следует интегрируемость f. Неравенство следует из $h \geqslant 0 \Rightarrow \int_E h(x)dx \geqslant 0$ для интегрируемой h, это следует из аналога для ступенчатых функций и возможности выбирать неотрицательные функции для аппроксимации неотрицательной измеримой f.

6. $\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx.$

Пишем $E = E^+ \coprod E^0 \coprod E^-$,

$$\Big|\int_E f(x)dx\Big| = \Big|\int_{E^+} |f(x)|dx - \int_{E^-} |f(x)|dx\Big|, \quad \int_E |f(x)|dx = \int_{E^+} |f(x)|dx + \int_{E^-} |f(x)|dx$$

всё следует из $a, b \geqslant 0 \Rightarrow |a-b| \leqslant a+b$.

7. Интегралы от f и от $|f|$ сходятся и расходятся одновременно.

Для ступенчатых функций из определения, а для измеримых предельным переходом.

Это странный момент, тут опять (был пример ступенчатой функции) появляются функции, у которых существует интеграл Римана (несобственный), а интеграла Лебега нет. Пример простой: несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy$$

сходится, но функция $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ не интегрируема по Лебегу на $[0,1]$.

8. **Предельный переход под знаком интеграла.**

Вопрос: пусть последовательность измеримых функций $f_n(x)$ в каком-то смысле сходится к измеримой функции $f(x)$, когда будет

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx? \qquad (2)$$

Контрпример: Пусть $f_n(x) = n,\ x \in (0, 1/n)$, иначе $f = 0$. Тогда $f_n \to 0$ на $[0,1]$, однако

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \neq \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

9. **Теорема (Лебег).** Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, причем $|f_n| \overset{a.e.}{\leqslant} K$, тогда справедливо (2).

Доказательство.

1) $|f| \overset{a.e.}{\leqslant} K$ (выберем подпоследовательность $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$ по теореме Рисса).

2) Пусть $\sigma > 0$, $A_n = \{x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$,

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|dx = \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_{E\setminus A_n} |f_n(x) - f(x)|dx.$$

3) Так как $\forall \sigma > 0$ справедливо $\mu(A_n) \to 0$ (это определение сходимости по мере!), то

$$\int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|dx \leqslant 2K\ \mu(A_n) \to 0.$$

Теперь из

$$\int_{E\setminus A_n} |f_n(x) - f(x)|dx \leqslant \sigma\ \mu(E)$$

следует

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|dx \leqslant 2K\ \mu(A_n) + \sigma\ \mu(E)$$

и (2) доказано чтд.

Лекция 8 (17 декабря 2012)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Ввели интеграл Лебега измеримых функций через ступенчатые функции.

2) Изучили свойства интегрируемых функций.

На этой лекции у нас в плане теорема Лебега об интеграле Римана и продолжение изучения свойств интеграла Лебега.

Как всегда я буду вольно пользоваться словами “ступенчатая функция”: буду называть так и настоящие ступенчатые функции “из 1го курса”, с конечным множеством ступенек-промежутков, и ступенчатые функции — измеримые с не более чем счетным множеством значений, где условные ступеньки размазаны по множеству.

Последней была доказана теорема, также Лебега.

Теорема (Лебег). Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, причем $|f_n| \overset{a.e.}{\leqslant} K$, тогда справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Перейдем к критерию измеримости по Риману, по дороге докажем несколько важных вещей.

10. **Теорема (Лебег).** Ограниченная функция на промежутке интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ множество её точек разрыва имеет меру 0.

Пример: *Характеристические функции канторовых множеств. Если мера канторова множества равна нулю, функция интегрируема по Риману, если мера канторова множества положительна — она интегрируема по Риману. “На вид” канторовы множества не различаются.*

Строгое доказательство теоремы Лебега. В начале не говорим, в какую сторону мы ведём доказательство. Рассмотрим окрестность $O_\delta = (x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap[a,b]$ точки x_0. Пусть

$$M_\delta(x_0) = \sup_{x\in O_\delta} f(x), \qquad m_\delta(x_0) = \inf_{x\in O_\delta} f(x).$$

Очевидно, $m_\delta(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M_\delta(x_0)$. По переменной δ обе функции монотонны, поэтому существуют пределы (они называются верхняя функция Бэра и нижняя функция Бэра для f)

$$m(x) = \lim_{\delta\to+0} m_\delta(x), \qquad M(x) = \lim_{\delta\to+0} M_\delta(x),$$

очевидны неравенства $m_\delta(x) \leqslant m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) \leqslant M_\delta(x)$.

Теорема Бэра. *Пусть f — ограниченная функция. Непрерывность f в точке x_0 эквивалентна равенству $M(x_0) = f(x_0) = m(x_0)$.*

В обе стороны простое доказательство.

Пусть функция непрерывна $\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \exists\delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Иными словами, при всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ справедливо $f(x)\in(f(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Поэтому

$$f(x_0)-\varepsilon \leqslant m_\delta(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) \leqslant f(x_0)+\varepsilon \;\Rightarrow f(x_0)-\varepsilon \leqslant m(x_0) \leqslant M(x_0) \leqslant f(x_0)+\varepsilon$$

Отсюда ввиду произвольности ε следует $M(x_0) = m(x_0)$.

Теперь пусть $M(x_0) = m(x_0) = f(x_0)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и найдем $\delta > 0$:

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqslant m(x_0) = M(x_0) \leqslant M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Отсюда $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \Rightarrow$ непрерывность.

Теорема Бэра доказана, продолжим доказательство теоремы Лебега.

Основная лемма. Рассмотрим последовательность разбиений

$$a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k-1}^k < x_{n_k}^k = b$$

причем при $k \to \infty$ мелкость стремиться к нулю: $\lambda_k = \max_\ell(x_{\ell+1}^k - x_\ell^k) \to 0$. Пусть

$$m_\ell^k = \inf_{x \in (x_\ell^k, x_{\ell+1}^k)} f(x), \qquad M_\ell^k = \sup_{x \in (x_\ell^k, x_{\ell+1}^k)} f(x).$$

Положим $\varphi_k(x) = m_\ell^k,\ \Phi_k(x) = M_\ell^k,\ x \in (x_\ell^k - x_{\ell+1}^k)$ и $\varphi_k(x) = \Phi_k(x) = 0$, если $x = x_\ell^k$.

Лемма. Если $x \neq x_\ell^k$, то $\varphi_k(x) \to m(x)$ и $\Phi_k(x) \to M(x)$.

Доказательство леммы. Доказываем для φ, для Φ — аналогично. Точка x не является точкой разбиения. Поэтому при каждом k она принадлежит какому-то интервалу $(x_{\ell_k}^k - x_{\ell_k+1}^k)$, так как мелкость λ_k стремится к нулю, то $\varphi_k(x) = m_{\ell_k}^k \to m(x)$. чтд

Следствие 1. Функции Бэра m и M измеримы.

Множество точек разбиения счетно и имеет меру ноль, поэтому $\varphi_k(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$, ступенчатые функции φ_k измеримы, значит и $m(x)$ измерима. чтд

Следствие 2. $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_k(x)dx \to \int_{[a,b]} m(x)dx, \qquad \int_{[a,b]} \Phi_k(x)dx \to \int_{[a,b]} M(x)dx.$

Следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Теперь заметим, что $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_k(x)dx$ — нижняя сумма Дарбу, а $\displaystyle\int_{[a,b]} \Phi_k(x)dx$ — верхняя сумма.

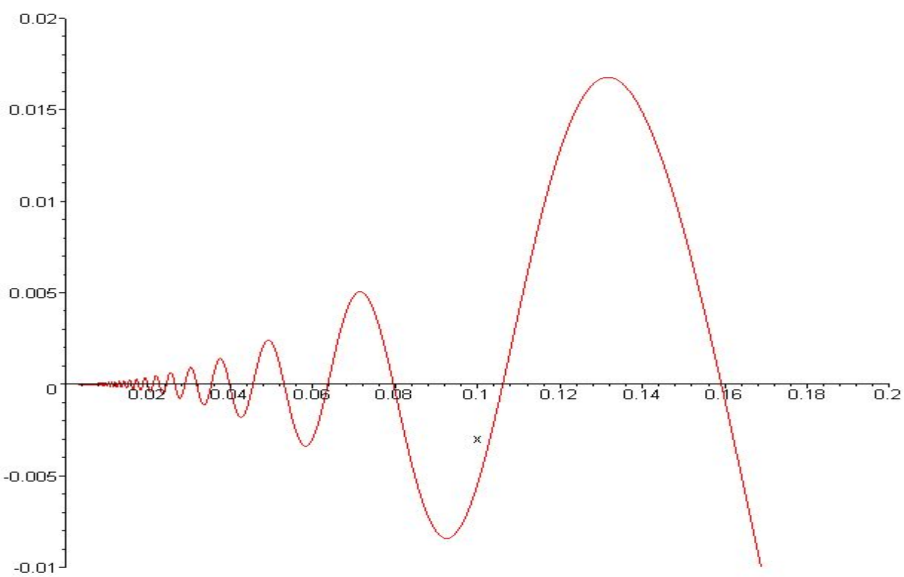
Теперь разность между суммами Дарбу стремиться к интегралу $\displaystyle\int_{[a,b]} (M(x) - m(x))dx$.

Предел разностей сумм Дарбу равен нулю, когда существует интеграл Римана, правая часть равна нулю, когда $M - m \overset{a.e.}{=} 0 \Leftrightarrow$ множество точек разрыва имеет меру нуль. **чтд**

Из изложенных конструкций следует мегаважная теорема: **если у функции есть интеграл Римана, то есть и интеграл Лебега, при этом они равны.** В самом деле, интеграл Римана - это предел интегральных сумм Дарбу, верхних и нижних, было показано, что это сходится к интегралу от функций Бэра, которые эквивалентны самой функции.

11. **Формула Ньютона-Лейбница для интеграла Лебега.**

Нигде не плотные множества. Напомнить определение: множество на отрезке называется нигде не плотным, если на любом интервальчике есть подинтервальчик, не принадлежащий множеству.



Пример функции, у которой есть производная везде, но такой, что эта производная не интегрируема по Риману (первый пример принадлежит Вольтерра, 1881, тот самый Вольтерра).

Берем канторово множество положительной меры. На нем полагаем функцию f равной нулю. На каждом интервале (α, β) из тех, что мы выбрасывали, кладем функцию равной

$$f(x) = (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 \sin\left((x-\alpha)^{-1}(\beta-x)^{-1}(\beta-\alpha)^{-1}\right) \quad \text{(на рисунке левый конец одного из интервалов)}$$

Такая функция имеет производную во всех точках, однако в конце каждого интервала эта производная разрывна и колеблется между -1 и 1. Соответственно, множество точек разрыва имеет ненулевую меру, следовательно оно не интегрируемо по Риману.

Теорема. Пусть f дифференцируема и пусть f' ограничена. Тогда она измерима и

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt.$$

Продлим функцию f на промежуток $[a, b+1]$ формулой $f(x) = f(b) + f'(b)(x-b)$. Рассмотрим функции $f_n(x) = n\Big(f(x+\dfrac{1}{n}) - f(x)\Big)$, которые теперь определены.

Эти функции в каждой точке сходятся к f', поэтому она измерима и интегрируема по Лебегу. По формуле Лагранжа (напомнить удивительную теорему о том, что производная принимает все промежуточные значения, не будучи непрерывной!) $f_n(x) = f'(x+\theta/n)$, поэтому функции f_n ограничены. Теперь

$$\int_a^b f'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx, \qquad \text{(тут всюду интегралы Лебега!)}$$

$$\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))dx = n\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)dx - n\int_a^b f(x)dx =$$

$$= n\int_b^{b+1/n} f(x)dx - n\int_a^{a+1/n} f(x)dx = f(b+\theta_1/n) - f(a+\theta_2/n) \to f(b) - f(a).$$

Получили $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, это верно при всех b, поэтому чтд.

Я здесь использовал формулу $\displaystyle\int_A f(x+c)dx = \int_{A+c} f(x)dx$. Для интеграла Римана — она тривиальна. Для интеграла Лебега её надо доказать. Она следует из инвариантности меры Лебега относительно сдвига.

12. **Полная аддитивность интеграла.** Счетная аддитивность по множеству: когда

$$\int_A f(x)dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx?$$

Теорема. Если f интегрируема на $A = \coprod_n A_n$, то все интегралы справа существуют и верна эта формула.

1. Для ступенчатых функций: пусть $B_k = \{x \in A, f(x) = y_k\},\ B_{n,k} = \{x \in A_n, f(x) = y_k\}$.

$$\int_A f(x)dx = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{n,k}) = \sum_n \sum_k y_k \mu(B_{n,k}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx$$

2. Пишем близкую к f ступенчатую функцию g, фиксируем $\varepsilon > 0$, доказываем формулу с точностью до $\varepsilon\mu(A)$ чтд

Теорема. Если $A = \coprod_n A_n$ и f интегрируема на каждом A_n, причем ряд

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|dx$$

сходится, то интеграл слева существует и верна формула.

Здесь надо показать, что из сходимости ряда следует интегрируемость f на A. Сначала для ступенчатых функций, потом для остальных.

13. **Неравенство Чебышева.** Оно есть в последнем листке :)

$$\mu(\{x \in A : |f(x)| \geqslant C\}) \leq \frac{1}{C} \int_A |f(x)|dx$$

14. **Срезки функций.** С каждой положительной измеримой функцией $f \geqslant 0$ свяжем её срезку

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant N; \\ N\,\mathrm{sign}(f), & \text{если } |f(x)| > N. \end{cases}$$

Очевидно, при каждом N функция $[f(x)]_N$ измерима.

Последовательность $[f(x)]_N$ монотонна: $[f(x)]_1 \leqslant [f(x)]_2 \leqslant \ldots \leqslant [f(x)]_N \leqslant \ldots$ поэтому

$$\int_E [f(x)]_1 dx \leqslant \int_E [f(x)]_2 dx \leqslant \ldots \leqslant \int_E [f(x)]_N dx \leqslant \ldots$$

Таким образом, существует конечный или бесконечный предел последовательности $\int_E [f(x)]_N dx$, он называется интегралом

$$\int_E f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N dx$$

от неограниченной неотрицательной измеримой функции. Такая функция называется суммируемой, если интеграл конечный.

Обсудить философию несобственного интеграла Римана на отрезке и интеграла Лебега. Если суммируемая функция подходит еще и под несобственный интеграл Римана, то этот интеграл сходится. Но суммируемость — это существенно более общее понятие!

Ещё раз обсудить определение интеграла Лебега. Сказать, что:

1. Интеграл от ступенчатой функции существует, если некий ряд абсолютно сходится. То есть, сходится его положительная часть и отрицательная часть. Мы его определили “сразу”, а можно было определить для положительных функций отдельно, и положить

$$\int_A f(x)dx = \int_A f_+(x)dx - \int_A f_-(x)dx.$$

2. Итак, есть неотрицательная функция. Пусть она ограничена. Тогда её интеграл можно определить как предел конечных интегральных сумм или как равномерный предел функций, принимающих конечное множество значений. Это получится то же самое определение, что и общее. Просто в общем определении был ряд, а тут будет предел конечных интегральных сумм, тот же ряд.

Лекция 9 (16 января 2013)

Итак, в конце 2012 мы ввели интеграл Лебега на ограниченном множестве через ступенчатые функции и начали его изучать.

Основное свойство: для любой измеримой ограниченной функции интеграл Лебега определен. Интеграл Лебега определен, если функция не слишком быстро возрастает к ∞. Функции, для которых определен интеграл Лебега - **интегрируемые** или **суммируемые** функции.

Про интеграл Римана мы доказали критерий интегрируемости по Риману (Лебег): измеримая ограниченная функция интегрируема по Риману iff множество её точек разрыва имеет меру ноль. При этом использовалась теорема о перестановке предела и интеграла:

Теорема (Лебег). Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, причем $|f_n| \overset{a.e.}{\leqslant} K$, тогда справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Начну с разных свойств интеграла Лебега, начну с самых простых.

1. Если $\mu E = 0$, то всякая функция f суммируема на E (всякая измерима на E) и интеграл равен нулю.

2. Если функции отличаются на множестве меры ноль, то они интегрируемы одновременно и интегралы от них совпадают.

3. Если интеграл от неотрицательной f равен нулю, то функция почти всюду 0.

4. Счетная аддитивность интеграла по множеству. Есть пространство с σ-аддитивной мерой (X, Σ, μ). Пусть $f \geqslant 0$ — суммируемая на X функция. Тогда функция множества

$$M(A) = \int_A f(x)d\mu$$

тоже σ-аддитивная мера на Σ с естественными свойствами типа $\mu(A) = 0 \Rightarrow M(A) = 0$. В частности, можно про новую меру не говорить, но если разбить множество, по которому интегрируем, в дизъюнктное объединение, то справедливо естественное равенство (про это были 2 теоремы).

5. Были рассмотрены срезки функций: пусть измеримая $f \geqslant 0$, положим

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N; \\ N\operatorname{sign}(f), & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

Функция интегрируема iff оба множества $\int_E [f^+]_N d\mu$, $\int_E [f^-]_N d\mu$ ограничены, при этом

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E [f^+]_N d\mu - \lim \int_E [f^-]_N d\mu.$$

6. **Абсолютная непрерывность интеграла.** Пусть f суммируема на E. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall e \subset E:\ \mu(e) < \delta \ \text{ справедливо } \int_e |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Это *абсолютная непрерывность* по множеству. Абсолютная непрерывность функции f на отрезке — сказать определение ($w(f,\Delta)$ — колебание f на Δ)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall N,(a_k,b_k):\ \mu(\coprod_{k=1}^{N}(a_k,b_k))<\delta\ \text{ справедливо }\ \sum_{k=1}^{N}w(f,(a_k,b_k))<\varepsilon$$

и сказать, что канторова лестница не абсолютно непрерывна, что $C^1\in AC$.

Для ограниченной f утверждение очевидно: $\delta=\varepsilon/\sup|f|$. Выберем N, так чтобы интеграл от срезки $[|f|]_N$ отличался от интеграла от $|f|$ на $\varepsilon/2$, потом по этому N выберем δ.

Выбор N: рассмотрим множества $E_n=\{x\in E:|f(x))\in[n-1,n)\}$, очевидно $E=\coprod_n E_n\ \Rightarrow$

$$\int_E|f(x)|dx=\sum_n\int_{E_n}|f(x)|dx,$$

Поэтому ряд в правой часть сходится, поэтому сходится ряд со срезкой вместо f, теперь

$$\int_E\Big||f(x)|-[|f|]_N\Big|dx=\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{E_n}\Big||f(x)|-[|f|]_N\Big|dx\to0$$

7. **Теорема (Лебег).** Пусть $f_n\overset{a.e.}{\to}f$, причем $|f_n|\overset{a.e.}{\leqslant}\varphi$ и φ интегрируемая. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

Это аналог предыдущей теоремы о предельном переходе, только там $\varphi=const$ и сходимость по мере (её тоже можно тут написать).

Для доказательства достаточно рассмотреть срезки всех функций. Опять, выберем N, чтобы интеграл от разности $\varphi-[\varphi]_N$ (и, следовательно, от аналогичных разностей для f и f_n) был меньше ε, теперь можно менять предел с интегралом местами по уже доказанной теореме. чтд

Замечание. Вместо оценки на f_n можно предполагать, что f_n имеют *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы*:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall e\subset E:\ \mu(e)<\delta\ \text{ справедливо }\ \left|\int_e f_n(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Тогда такая же теорема называется **теорема Витали**.

8. **Теорема (лемма) Фату.** Если $f_n\overset{a.e.}{\to}f(x),\ f_n\geqslant0$, то

$$\int_E f(x)dx\leqslant\sup\left(\int_E f_n(x)dx\right).$$

Справедливо также неравенство $\int_E f(x)dx\leqslant\varliminf\left(\int_E f_n(x)dx\right)$, обойдемся без него.

Применим теорему Лебега к срезкам (все функции ограничены числом N):

$$\int_E[f(x)]_N dx=\lim_{n\to\infty}\int_E[f_n(x)]_N dx.$$

Но

$$\int_E [f_n(x)]_N dx \leqslant \int_E f_n(x)dx \leqslant \sup\left(\int_E f_n(x)dx\right),$$

поэтому

$$\int_E [f(x)]_N dx \leqslant \sup\left(\int_E f_n(x)dx\right)$$

В пределе по N чтд

9. Если в условиях теоремы Фату существует $\lim \int_E f_n(x)dx$, то

$$\int_E f(x)dx \leqslant \lim \int_E f_n(x)dx.$$

10. **Теорема Леви.** Если последовательность f_n монотонна при всех значениях аргумента $x \in A$, все f_n интегрируемы и пусть все интегралы ограничены в совокупности:

$$\int_A f_n(x)dx \leqslant K.$$

Тогда почти всюду существует конечный предел $f \leftarrow f_n$, f интегрируема на A и можно переставлять предел с интегралом.

— Без ограничения общности считаем все функции неотрицательными.

— Очевидно, что мера множества $\Omega = \{x \in E : f_n(x) \to \infty\}$ равна нулю (следует из условия ограниченности интегралов в силу неравенства Чебышева, например).

— Теперь $f_n \overset{a.e.}{\to} f$. Осталось доказать интегрируемость f (следует из леммы Фату) и сослаться на теорему Лебега, чтд

11. Можно переставлять интеграл со сходящимся рядом из положительных элементов.

12. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Пусть есть X — бесконечной меры. Пусть $\mu(X_n) < \infty$, $X_n \subset X_{n+1}$, $X = \bigcup X_n$ — исчерпывающая последовательность. Измеримая функция называется интегрируемой на X, если для любой исчерпывающей X_n существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)dx,$$

Этот предел называется интегралом от f по X.

Это определение корректно (все пределы общие для всех исчерпывающих последовательностей, если $\mu(\operatorname{supp} f) < \infty$, то $\int_X f dx = \int_{\operatorname{supp} f} f dx$).

Тут опять возникает **различие с интегралом Римана**: не бывает условно сходящихся интегралов Лебега (Пример, аналог интеграла Дирихле: $\sin x/x$ на $\mathbb{R}^+$ не интегрируема по Лебегу!).

Новая тема: дифференцируемость функций — для функций на прямой.

История вопроса. В 1806 году Ампер в трудах Экёль Политехник пытался установить дифференцируемость произвольной функции всюду, кроме исключительных и изолированных точек. Вейерштрасс (опубликовано в 1975 году Дю Буа-Раймоном) первый привел пример функции нигде не имеющей производной.

Объяснить откуда такие функции берутся, рассмотреть пример пилы, которую мы сжимаем в 100 раз по горизонтали и 2 раза по вертикали.

Тогда сумма ряда из таких пил даст требуемый пример: наклон зубцов пил стремиться к бесконечности. При этом результат — непрерывная функция, очевидно. Формальная конструкция - ниже.

Пример непрерывной функции, не имеющей производной нигде (ван дер Варден).

Обозначим $\{x\}$ расстояние от x до ближайшего целого числа и положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}, \quad x \in [0, 1).$$

Ряд мажорируется геометрической прогрессией, равномерно сходится к непрерывной f. Запишем

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

если дробь конечна, то будем дописывать нулями. Очевидно, $\{10^n x\} = 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots$, если десятичная дробь справа $\leqslant \frac{1}{2}$, иначе $\{10^n x\} = 1 - 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots$. Положим $h_m = -10^{-m}$, если $a_m = 4$ или 9, и $h_m = 10^{-m}$ при всех других a_m. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} = 10^m \sum_{n=0}^{\infty} \pm \frac{\{10^n (x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n}.$$

Числители дробей справа обращаются в ноль при $n \geq m$ и равны $\pm 10^{n-m}$ при $n < m$. Поэтому

$$\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1.$$

При различных m это целые числа, четность которых совпадает с четностью числа m. Поэтому предела частно-разностного отношения нет, чтд.

Лекция 10 (23 января 2013)

На прошлой лекции мы завершили изучение "технических" свойств интеграла Лебега. Из всех перечисленных свойств подчеркну свойство абсолютной непрерывности. На этой лекции я перейду к анонсированной теореме Лебега.

Напомнить, что у монотонной функции не более счетного количества разрывов.

Теорема Лебега. *Каждая монотонная функция почти всюду имеет производную.*

Доказательство проведем для непрерывной функции, хотя здесь всё написано для разрывных.

Шаг 1. Функции полунепрерывные сверху в точке x_0: $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$. Монотонные функции — это $f(x_0) = f(x_0+0)$.

Шаг 2. Определение. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, точка $x \in (a,b)$ называется невидимой справа для f, если $\exists t \in (x,b] :$ справедливо $f(x) < f(t)$.

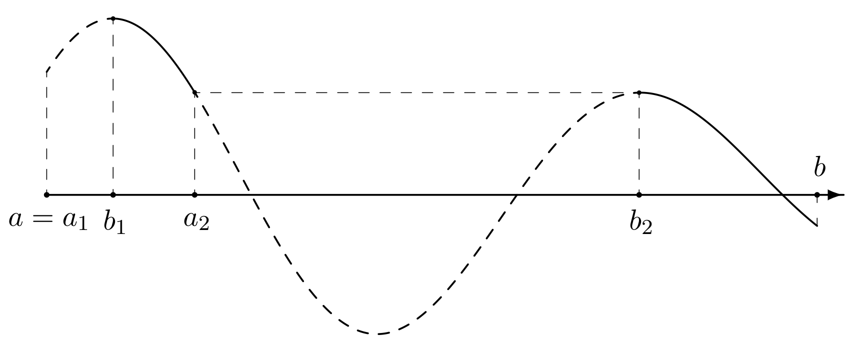


Рис. 2: Лемма о светотени

Шаг 3. Лемма Рисса о светотени. Пусть f — полунепрерывная сверху функция на $[a,b]$. Множество точек A, невидимых справа для f, открыто, $A = \coprod_n (a_n, b_n) \Rightarrow f(a_n+0) \leqslant f(b_n)$.

На самом деле, $f(a_n) = f(b_n)$, но может быть $f(a_1+0) < f(b_1)$, если $a_1 = a$.

Подчеркнуть, что $a \notin A$ по определению.

Открытость просто: если $f(x) < f(t)$, то по полунепрерывности то же самое и в окрестности.

Пусть $(a_k, b_k) \subset A,\ a_k, b_k \notin A$ и пусть $f(a_k+0) > f(b_k)$. Тогда $\exists x_0 : f(x_0) > f(b_k)$.

Рассмотрим множество $D = \{x \in [x_0, b_k) : f(x) \geqslant f(x_0)\}$, D — непустое, замкнутое, ограниченное; пусть $\sup D = x_1$. По построению, $x_1 \in A \Rightarrow \exists t : f(t) > f(x_1)$. Теперь t не может лежать правее b_k (иначе b_k — невидима справа), то есть $t \in (x_1, b_k)$. Тогда $t \in D$ и $x_1 \neq \sup D$. Противоречие.

Шаг 4. Критерий пренебрежимости. $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \exists \theta \in (0,1) :\ \forall (a_1, b_1) \in (a,b)$ справедливо $\mu^*(A \bigcap (a_1, b_1)) \leqslant \theta(b_1 - a_1)$.

Сказать, что в силу критерия из $\mu(A) > 0$ следует $\forall \theta \in (0,1) \exists (a,b) : \mu(A \bigcap (a,b)) > \theta(b-a)$.

В одну сторону (если $\mu(A)=0$) очевидно. Пусть $B=\coprod_k \Delta_k \supset A$. По условию

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\bigcap\coprod_k \Delta_k)=\mu^*(\coprod_k \Big(A\bigcap \Delta_k\Big))=\sum_k \mu^*\Big(A\bigcap\Delta_k\Big)\leqslant\theta\sum_k \mu(\Delta_k)=\theta\mu(B).$$

Переходим к inf по всем B, получаем $\mu^*(A)\leqslant\theta\mu^*(A)\Rightarrow\mu^*(A)=0$ чтд.

Шаг 5. Определение производных чисел:

$$D_R(x)=\varliminf_{t\to x+0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\qquad D_L(x)=\varliminf_{t\to x-0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$
$$D^R(x)=\varlimsup_{t\to x+0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\qquad D^L(x)=\varlimsup_{t\to x-0}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Шаг 6. Теорему будем доказывать для возрастающих (= неубывающих) функций. Для её доказательства достаточно показать, что 1) $D^R(x)\overset{a.e.}{<}\infty$ и 2) $D^R(x)\overset{a.e.}{\leqslant} D_L(x)$.

Если это докажем (для любой возрастающей f), то докажем и для $-f(-x)$), поэтому докажем $D^L(x)\overset{a.e.}{\leqslant} D_R(x)$, поэтому $D^R(x)\overset{a.e.}{\leqslant} D_L(x)\leqslant D^L(x)\overset{a.e.}{\leqslant} D_R(x)\leqslant D^R(x)\Rightarrow$ все неравенства — это равенства почти всюду.

Доказательство теоремы Лебега. Без ограничения общности считаем функцию полунепрерывной справа. Иначе переопределим на не более чем счетном множестве точек разрыва.

1) По каждому $C>0$ рассмотрим множество $R_{>C}=\{x\in(a,b):D^R(x)>C\}$. Чтобы доказать $D^R(x)\overset{a.e.}{<}\infty$, нужно показать, что $\mu^*(R_{>C})\to 0$ при $C\to\infty$.

Пусть $x\in R_{>C}$. Тогда существует точка $t>x$, для которой $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}>C\Leftrightarrow f(t)-Ct> f(x)-Cx$, таким образом, множество $R_{>C}$ состоит из точек, невидимых справа для функции $g(x)=f(x)-Cx$. По лемме о светотени, $R_{>C}$ содержится в некотором открытом $B=\coprod_n(a_n,b_n)$, причем $g(a_n+0)\leqslant g(b_n)$. То есть

$$b_n-a_n\leqslant\frac{1}{C}(f(b_n)-f(a_n+0))\leqslant\frac{1}{C}(f(b_n)-f(a_n)).$$

Промежутки $(f(a_n),f(b_n))$ — непересекающиеся подинтервалы $(f(a),f(b))$, поэтому

$$\mu^*(R_{>C})\leqslant\sum_n(b_n-a_n)\leqslant\frac{1}{C}\sum_n(f(b_n)-f(a_n+0))\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{C}\to 0. \tag{3}$$

2) Перейдем к доказательству $D^R(x)\overset{a.e.}{\leqslant} D_L(x)$.

Обозначим $D=\{x\in(a,b):D^R(x)>D_L(x)\}$. Далее, для любой пары рациональных чисел (C,c), $0<c<C$ обозначим $D(C,c)=\{x\in(a,b):D_L(x)<c, D^R(x)>C\}$. Множеств $D(C,c)$ счетное число, $D=\bigcup_{C,c}D(C,c)$. Следовательно, для доказательства пренебрежимости D достаточно доказать пренебрежимость каждого $D(C,c)$. Будем это делать с помощью критерия пренебрежимости с $\theta=c/C$.

Пусть $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, $x\in D(C,c)\bigcap(\alpha,\beta)$. Так как

$$D_L(x)<c\Rightarrow\exists t\in(\alpha,x):\frac{f(x)-f(t)}{x-t}<c.$$

Тогда $f(x)-cx < f(t)-ct \;\Rightarrow\; x$ — точка, невидимая слева для функции $g(y) = f(y)-cy$ на (α, β). Применим лемму о светотени, получим, что множество $D(C,c)\bigcap(\alpha,\beta)$ содержится в конечном или счетном дизъюнктивном объединении интервалов (α_n, β_n) таких, что $f(\beta_n-0)-f(\alpha_n) \leqslant c(\beta_n-\alpha_n)$.

Условие (3) было доказано для возрастающей функции на любом отрезке. Вспомним, что $D(C,c) \subset R_{>C}$, применим (3) к функции f на (α_n, β_n):

$$\mu^*\big(D(C,c)\bigcap(\alpha_n,\beta_n)\big) \leqslant \mu^*\big(R_{>C}\bigcap(\alpha_n,\beta_n)\big) \leqslant \frac{1}{C}\big(f(\beta_n-0)-f(\alpha_n)\big) \leqslant \frac{c}{C}(\beta_n-\alpha_n).$$

Теперь по построению $D(C,c)\bigcap(\alpha,\beta) = \bigcup_n \left(D(C,c)\bigcap(\alpha_n,\beta_n)\right)$, в силу σ-полуаддитивности μ^*:

$$\mu^*\big(D(C,c)\bigcap(\alpha,\beta)\big) \leqslant \sum_n \mu^*\big(D(C,c)\bigcap(\alpha_n,\beta_n)\big) \leqslant \frac{c}{C}\sum_n \big(\alpha_n-\beta_n\big) \leqslant \frac{c}{C}(\beta-\alpha).$$

В силу критерия пренебрежения $\mu^*(D(C,c)) = 0$ чтд.

Теорема Фуббини (Fubini's differentiation theorem, малая, не путайте с той, что на листке). Пусть $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ — неубывающие функции, причём ряд $\sum f_k = s(x)$ сходится поточечно. Тогда ряд $\sum f_k'(x)$ сходится почти всюду и $\sum f_k'(x) \overset{a.e.}{=} s'(x)$.

1. Без ограничения общности считаем, что $f_k(a) = 0$ при всех k, $f_k \geqslant 0$.
2. $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \to s(x)$, это всё монотонные функции.
3. $f_k'(x), s_k'(x), s(x) \geqslant 0$ существуют при $x \in [a,b] \setminus E_0$, $\mu(E_0) = 0$.
4. Очевидно, $s_n'(x) \leqslant s_{n+1}'(x) \leqslant s'(x),\; x \notin E_0$. Поэтому равенство $s'(x) - s_n'(x) \to 0$ достаточно проверить для какой-то подпоследовательности n_k.
5. $s_n(b) \to s(b)$, выберем подпоследовательность n_k так, чтобы ряд $\sum(s(b) - s_{n_k}(b))$ сходился.
6. $s(x) - s_{n_k}(x) \leqslant s(b) - s_{n_k}(b)$. Это следует из монотонности $s - s_{n_k} = \sum f_m$.
7. Поэтому $\sum(s - s_{n_k})$ — это ряд из монотонных функций, такого же типа как и ряд из f_k. Для такого ряда только что доказали сходимость из производных почти всюду, раз ряд сходится, значит и $s'(x) - s_{n_k}'(x) \overset{a.e.}{\to} 0$ чтд.

Замечание. Ну всё-таки чудес нету :) Тут и функции положительные, и производные неотрицательны... монотонность и ограниченность, поэтому естественно, что ряды сходятся :)

Лекция 11 (30 января 2013)

На прошлой лекции была рассказана теорема Лебега о том, что любая монотонная функция почти всюду имеет производную. Также была доказана теорема Фуббини о том, что сходящиеся поточечно ряды из монотонных функций можно дифференцировать почти всюду.

Теперь мы можем перейти к связи операций дифференцирования и интегрирования по Лебегу. *Поговорить про аналог с интегралом Римана и непрерывной функцией. Про взаимную обратность операций дифференцирования и интегрирования.*

Производная неопределенного интеграла Лебега.

В это направлении с интегралом Лебега когда-то была теорема одна: пусть f дифференцируема и пусть f' ограничена. Тогда она измерима и

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt.$$

Теперь установим другую теорему:

Теорема. Пусть f интегрируема. Тогда $f(x) \overset{a.e.}{=} \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt\right)$.

Доказательство.

1. Положим $\Phi(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt$. В силу того, что Φ можно представить в виде разности двух монотонных функций, в силу теоремы Лебега, почти всюду определена производная $\Phi'(x)$.

2. Покажем сперва, что $f(x) \overset{a.e.}{\geqslant} \Phi'(x)$.

Если $f(x) < \Phi'(x)$, то найдутся рациональные α и β такие, что $f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x)$, обозначим $E_{\alpha,\beta} = \{x : f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x)\}$. Если $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ при всех α, β, то всё доказано. Пусть при некоторых α, β выполнено $\mu(E_{\alpha,\beta}) > 0$.

3. Пусть $\varepsilon > 0$, построим по нему δ в силу абсолютной непрерывности:

$$\mu(e) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\int_e f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Выберем теперь открытое множество $G \subset [a, b]$ так, чтобы $E_{\alpha,\beta} \subset G$ и $\mu(G) < \mu(E_{\alpha,\beta}) + \delta$.

4. Если $x \in E_{\alpha,\beta}$, то

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta, \qquad \forall \xi > x,\ \xi - x \text{ мало.}$$

Переписываем в виде $\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x$, получаем, что точка x — невидимая справа для функции $\Phi(x) - \beta x$ на любом из интервалов, составляющих G. Используем лемму Рисса о светотени: $\exists$ открытое множество $S = \bigcup_k (a_k, b_k)$ такое, что $E_{\alpha,\beta} \subset S \subset G$ и $\Phi(b_k) - \beta b_k \geqslant \Phi(a_k) - \beta a_k$. Поэтому При каждом k

$$\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geqslant \beta(b_k - a_k) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{(a_k,b_k)} f(t)\,dt \geqslant \beta(b_k - a_k).$$

Суммируем по k, получаем $\displaystyle\int_S f(t)\,dt \geqslant \beta\mu(S)$. Одновременно,

$$\int_S f(t)\,dt = \int_{E_{\alpha,\beta}} f(t)\,dt + \int_{S\setminus E_{\alpha,\beta}} f(t)\,dt + \varepsilon \leqslant \alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta.$$

Отсюда $\alpha\mu(S)+\varepsilon+|\alpha|\delta \geqslant \beta\mu(S)$ и $\mu(S)\leqslant(\varepsilon+|\alpha|\delta)/(\beta-\alpha)$. Теперь множество $E_{\alpha,\beta}$ оказалось включено в множество S сколь угодно малой меры, значит $\mu(E_{\alpha,\beta})=0$.

5. Доказали, что $f(x)\overset{a.e.}{\geqslant}\Phi'(x)$. Заменив функцию $f(x)$ на $-f(x)$, так же получим, что $-f(x)\overset{a.e.}{\geqslant} -\Phi'(x)$, поэтому $f(x)\overset{a.e.}{=}\Phi'(x)$, чтд

Мы знаем, что формула $F(x)=F(a)+\int_{[a,x]}F'(t)\,dt$ не правильная даже для монотонных функций: канторова лестница — контрпример.

Теорема: производная F' монотонной неубывающей функции F суммируема и $\int_{[a,x]}F'(t)\,dt\leqslant F(x)-F(a)$.

Доказательство. Продолжим $F(x)=F(b)$ при $x>b$ и пусть $\phi_h(x)=(F(x+h)-F(x))/h\geqslant 0$.

$$\lim_{h\to 0}\int_{[a,b]}\phi_h(x)dx = ... = F(b)-F(a+0).$$

Теперь в силу теоремы Фату

$$\int_{[a,b]}F'(x)dx=\int_{[a,b]}\lim_{h\to 0}\phi_h(x)\leqslant\lim_{h\to 0}\int_{[a,b]}\phi_h(x)dx\leqslant F(b)-F(a).$$

Напоминаю теорему Фату: если $f_n\overset{a.e.}{\to}f(x),\ f_n\geqslant 0$, то $\displaystyle\int_E f(x)dx\leqslant\sup\left(\int_E f_n(x)dx\right)$.

Основной смысл этой теоремы примерно такой. Каждая непрерывная возрастающая функция F представима в виде суммы двух функций, двух частей: *абсолютно-непрерывной* и *сингулярной.* Для абсолютно непрерывной части формула Ньютона–Лейбница выполнена. А для сингулярной (это что-то типа канторовой лестницы) производная почти всюду рана нулю. Обе монотонно неубывающие, интеграл от F равен интегралу от производной абсолютно непрерывной части, а справа стоит нечто большее: сумма приращений обеих частей.

Определение 1. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta_1>0:\forall(a_k,b_k):\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-a_k|<\delta_1\ \text{ справедливо }\ \sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

Определение 2. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta_2>0:\forall N,(a_k,b_k),k=1,\dots,N:\sum_{k=1}^{N}|b_k-a_k|<\delta_2\ \text{ справедливо }\ \sum_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

Пишем $f\in AC$ или $f\in AC(0,1)$ или $f\in AC([0,1])$: “*absolutely continuous*”.

Определение 3. Абсолютно непрерывная функция f:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta_3>0:\forall N,(a_k,b_k):\sum_{k=1}^{N}|b_k-a_k|<\delta_3\ \text{ справедливо }\ \sum_{k=1}^{N}\omega(f,[a_k,b_k])<\varepsilon,$$

$\omega(f,\Delta)=\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x)$ — колебание f на Δ.

Определения эквивалентны.

Из O1 следует O2 (почти очевидно). Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Строим по ε число δ_1. Теперь полагаем $\delta_2 = \delta_1/2$. Берем конечную систему интервалов, суммарной длины δ_2. Добираем эту систему до бесконечной: берем точку, в её окрестности берем точку на расстоянии меньше $\delta_2/2$, потом следующую точку, в её окрестности берем точку на расстоянии меньше $\delta_2/4$, и т.д. Получили счетную систему интервалов, длины меньше δ_1, поэтому сумма приращений будет меньше ε чтд

В обратную сторону (из O2 следует O1) чуть сложнее. Заметим, сначала, что если есть ряд с неотрицательными элементами c_k, и для любого конечного множества элементов их сумма не превосходит K, то и сумма ряда меньше K — это вроде очевидно. Отсюда с точностью до нестрогого неравенства следует O2⇒O1. чтд

Из O3 следует O2 — очевидно, так как $\omega(f,[a_k,b_k]) \geqslant |f(b_k) - f(a_k)|$.

Из O2 следует O3. По заданному ε строим $\delta_3 = \delta_2(\varepsilon/2)$. Берем N и набор из N промежутков $\Delta_k = [a_k, b_k]$ с суммой длин меньше δ_3. На каждом промежутке Δ_k берем точки a'_k, b'_k, так чтобы $|f(b'_k) - f(a'_k)| \geqslant \omega(f,[a_k,b_k]) - \varepsilon/(2N)$. Теперь $\sum_{k=1}^N |b'_k - a'_k| < \delta_3$, поэтому $\sum_{k=1}^N |f(b'_k) - f(a'_k)| \leqslant \varepsilon/2$ и $\sum_{k=1}^N \omega(f,[a_k,b_k]) \leqslant \varepsilon$. чтд

Примеры чуть позже.

Свойства AC функций.

1. $g \in L_1 \Rightarrow G(x) = \int_{[a,x]} g(t)dt \in AC$ — следует из абсолютной непрерывности интеграла.

2. $g \in AC \Rightarrow g \in C$ — полагаем в O2 $N = 1$.

3. $g \in AC \Rightarrow |g| \in AC$ очевидно.

4. $g \in C,\ |g| \in AC \Rightarrow g \in AC$. Свойство чуть похитрее.

Для доказательства, рассмотрим произвольную конечную систему интервалов. Выделим в ней те, в которых g принимает значения разных знаков. На этих интервалах, по теореме Коши, есть точка, в которой g обращается в ноль. Увеличим количество интервалов: разобьем такие интервалы точками, нулями функции, вместо каждого получится ровно 2. Теперь колебание по полученной системе от $|g|$ равно колебанию по исходной от g. чтд

Определение. Вариация функции f: $\displaystyle\bigvee_a^b f = \sup_{x_k} \sum |f(x_{k-1}) - f(x_k)|.$

Пишем, $f \in BV$ (“*Boundary Variation*”), если у f ограниченная вариация, $BV \not\subset C$.

Нарисовать, что такое вариация на картинке с монотонной и кусочно монотонной функцией. Для монотонной написать, что

$$\bigvee_a^b f = \sup_{x_k} \sum |f(x_{k-1}) - f(x_k)| = \sup_{x_k} \sum \Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big) = f(b) - f(a).$$

Лекция 12 (6 февраля 2013)

На прошлой лекции обсуждался вопрос о том, обратны ли операции интегрирования и дифференцирования, если интегрирование в смысле Лебега, а равенства — почти всюду.

1) Была доказана трудная теорема: пусть f интегрируема. Тогда $f(x) \overset{a.e.}{=} \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt\right)$.

2) Была доказана теорема попроще: производная F' монотонной неубывающей функции F суммируема и $\int_{[a,x]} F'(t)\,dt \leqslant F(x) - F(a)$.

3) Были введены абсолютно непрерывные функции, даны разные определения, доказана их эквивалентность. Рассмотрены простейшие свойства.

4) Были введены функции ограниченной вариации. Эти функции, как мы увидим “потом”, очень связаны с монотонными функциями. Поэтому первая теорема была о том, что каждая монотонная функция (может быть и разрывная) — BV функция, причём $\bigvee\limits_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

Определения не повторяю, сразу перехожу к дальнейшему изложению.

Соображение. Когда считаем полную вариацию $\bigvee\limits_a^b f$ функции f на отрезке $[a, b]$, мы считаем суммы $\sum |f(x_{k-1}) - f(x_k)|$. Если к существующему разбиению добавить дополнительную точку $x^* \in [x_k, x_{k+1}]$, то сумма не уменьшится. Это следует из неравенства треугольника: $|f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leqslant |f(x_{k-1}) - f(x^*)| + |f(x_k) - f(x^*)|$. Это напоминает чем-то интегральные суммы Дарбу в теории интеграла Римана, там тоже добавление точки к верхним и нижним суммам Дарбу их уменьшало-увеличивало.

Вывод. В формуле для полной вариации вместо супремума по всем разбиениям можно писать супремум по всем достаточно мелким.

Из $f \in AC \Rightarrow f \in BV$, наоборот не верно. То, что наоборот не верно следует из того, что разрывная функция может иметь ограниченную вариацию, однако не может быть AC.

Теорема. Если функция абсолютно непрерывна, то она имеет ограниченное изменение.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = 1$). Выберем δ по абсолютной непрерывности.

2. Теперь возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ на произвольное количество сегментов длины меньше $\delta/100$.

3. Все эти сегменты можно сгруппировать в фиксированное количество групп, в каждой группе суммарной длины не более δ, по много-много в каждой группе, но групп таких будет не более $m = (b - a)/(.99\delta) + 1$.

4. Все сегменты каждой группы имеют суммарную длину не более δ, поэтому суммарное приращение по всем сегментам каждой группы не более ε.

5. Теперь общее суммарное приращение функции не превышает $m\varepsilon$ чтд.

Лемма. Сумма, разность и произведение двух AC функций, тоже AC функции.

Сумма, разность — очевидно, надо по $\varepsilon/2$ построить δ для каждой из входящих функций, а потом взять минимальное число.

Произведение: пусть $f, g \in AC$, пусть $\varepsilon > 0$, теперь выберем для функции f по определению абсолютной непрерывности δ_f по числу $\varepsilon/(2\max|g|)$ и, наоборот, выберем для функции g по определению абсолютной непрерывности δ_g по числу $\varepsilon/(2\max|f|)$. Теперь положим $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Включение $fg \in AC$ следует из

$$\sum |f(a_k)g(a_k) - f(b_k)g(b_k)| \leqslant \max|g| \sum |f(a_k) - f(b_k)| + \max|f| \sum |g(a_k) - f(g_k)| < \varepsilon.$$

Примеры. 1) $f(x) = x\sin(\frac{\pi}{2x})$ на $[0,1]$. Здесь $f \in C$, но $f \notin BV$. В точках $x_k = (2n+1)^{-1}$ значение функции равно $\pm(2n+1)^{-1}$.

2) $f(x) = x^2\sin(\frac{\pi}{2x^2})$ на $[0,1]$. Здесь $f \in C$, всюду имеет производную, но $f \notin BV$. В точках $x_k = (2n+1)^{-1/2}$ значение функции равно $\pm(2n+1)^{-1}$.

Главный пример: условие Липшица ($|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$) $\Rightarrow$ ограниченная вариация и абсолютная непрерывность. В частности, $f \in C^1 \Rightarrow f \in LC \Rightarrow f \in BV$ (LC — "*Lipschitz continuous*").

Далее, условие Гёльдера $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$. Тут всё не так. Гёльдерова функция может не быть абсолютно непрерывной. Агитация: если $\alpha < 1$, то $\sum |\Delta_k| \to 0 \not\Rightarrow \sum |\Delta_k|^\alpha \to 0$. Пример: чертова лестница Гёльдерова, имеет ограниченную вариацию, однако не абсолютно непрерывна!

Кто посчитал α в неравенстве Гёльдера для канторовой лестницы, тот молодец!

Теорема. Пусть f суммируемая функция, $F(x) = \int_{[a,x]} f(y)dy$, тогда $\bigvee_a^b F = \int_{[a,b]} |f(x)|dx$

Заметим, что $F' \overset{a.e.}{=} f$ (трудная теорема с прошлой лекции!). Иными словами, если F получена интегрированием, то

$$\bigvee_a^b F = \int_{[a,b]} |F'(x)|dx.$$

Доказательство. 1. Пусть x_k — разбиение отрезка $[a,b]$. Ниже $e(x)$ — ступенчатая функция, $|e(x)| \leqslant 1$, ступеньки по $[x_k, x_{k+1})$. Очевидно,

$$\int_{[a,b]} e(x)f(x)dx = \sum_k e_k \int_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)dx = \sum_k e_k[F(x_{k+1}) - F(x_k)]$$

2. Теперь $\bigvee_a^b F = \sup_{x_k} \sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sup_{x_k, e} \sum_k e_k[F(x_{k+1}) - F(x_k)]$.

3. Покажем, что $S = \sup_e \int_{[a,b]} e(x)f(x)dx = \int_{[a,b]} |f(x)|dx = Q$.

4. Пусть $\varphi_n \overset{a.e.}{\to} f$ — последовательность ступенчатых функций (существуют в силу альтернативного определения измеримости!). Положим $e_n = [n\varphi_n]_1$ — срезка на уровнях ± 1 функции $n\varphi_n$. При $n \to \infty$ получаем $e_n \overset{a.e.}{\to} \operatorname{sign}(f)$, если $f \neq 0$, то есть $e_n f \overset{a.e.}{\to} |f|$ и $|e_n(x)f(x)| \leqslant |f(x)|$, поэтому (из сходимости почти всюду следует сходимость по мере, из $\overset{\mu}{\to}$ и мажорируемости следует возможность переставлять предел и интеграл)

$$\lim \int_a^b e_n(x)f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

5. С одной стороны, очевидно, $S \leqslant Q$, с другой стороны $S \geqslant Q - \delta$ чтд.

Теорема Жордана. Если функция имеет ограниченную вариацию, то она является суммой возрастающей функции и убывающей функции.

Сначала рассказать, что $a < c < b \Rightarrow \bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$.

Функция $T(x) = \bigvee_a^x f$, монотонно возрастающая. Покажем, что разность $f(x) - T(x)$ — это монотонная убывающая функция. Пусть $x < \xi$, сравним $f(x) - T(x)$ и $f(\xi) - T(\xi)$, что то же, сравним $T(\xi) - T(x)$ и $f(x) - f(\xi)$, очевидно $T(\xi) - T(x) = \bigvee_x^\xi f \geqslant |f(x) - f(\xi)|$ чтд.

Теорема. Если $f \in AC$, то $T(x) \in AC$.

Из этой теоремы следует, что абсолютно непрерывная функция представима в виде разности абсолютно непрерывных неубывающих функций.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что в качестве δ для функции T можно выбрать то же самое, что и для f.

Выберем конечное множество промежутков (a_k, b_k). Рассмотрим сумму

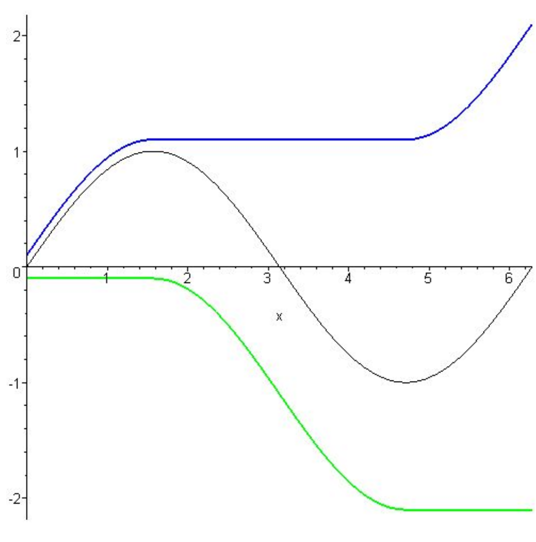
$$S = \sum_{k=1}^{N} \big(T(b_k) - T(a_k)\big) = \sum_{k=1}^{N} \bigvee_{a_k}^{b_k} f.$$

Разобьем каждый k-й интервал (a_k, b_k) на конечное множество интервалов n_k точками x_k^j и рассмотрим суммы

$$s_k = \sum_{m=1}^{n_k} |f(x_k^{j+1}) - f(x_k^j)|. \qquad \bigvee_{a_k}^{b_k} f = \sup_{n_k; x_k^j} s_k$$

Теперь сумма длин всех промежутков (x_k^j, x_k^{j+1}) равна сумме длин всех промежутков (a_k, b_k) и не превосходит δ, поэтому

$$\sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant \varepsilon \Rightarrow S = \sup \sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant \varepsilon.$$



Примеры.

1) Нет единственности никакой: например

$$f(x) = \frac{1}{2}(T(x) + f(x)) - \frac{1}{2}(T(x) - f(x))$$

2) Если кусочно монотонная функция, то полная вариация совпадает с суммой перепадов высот между горами и оврагами.

3) На рисунке функция ограниченной вариации $\sin x$ (черная линия) представлена в виде суммы двух монотонных функций (синяя и зеленая линия).

Сказать, что можно разность монотонно возрастающих, можно сумма возрастающей и убывающей.

Лемма. Если абсолютно непрерывная функция f монотонна и $f'(x) \overset{a.e.}{=} 0$, то $f \equiv const$.

1. $[a,b] = E_0 \bigcup E_1,\ E_0 = \{x : \exists f'(x) = 0\},\ E_1 = \{x : \exists f'(x) \neq 0\} \bigcup \{x : \nexists\ f'(x)\}$.

2. $\mu(E_1) = 0 \Rightarrow \mu(f(E_1)) = 0$ — следует из абсолютной непрерывности. В общем случае — это задача из листка, а в монотонном случае я легко это докажу тут (доказать).

3. Покажем, что также $\mu(f(E_0)) = 0$, это завершит доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

4. $\forall\ x \in E_0\ \exists\ \xi > x :$ справедливо $f(\xi) - f(x) < \varepsilon(\xi - x)$. Таким образом, E_0 принадлежит множеству точек E_ε, невидимых справа для функции $g_\varepsilon = \varepsilon x - f(x)$. По лемме Рисса о светотени E_ε представляет собой систему интервалов (a_k, b_k), для которых $g_\varepsilon(a_k) \leqslant g_\varepsilon(b_k) \Rightarrow f(b_k) - f(a_k) < \varepsilon(b_k - a_k)$.

5. Теперь $\sum(f(b_k) - f(a_k)) \leqslant \varepsilon \sum(b_k - a_k) \leqslant \varepsilon(b - a)$

6. Получилось, что образ E_0 имеет меру ноль, и образ E_1 имеет меру ноль, а это отрезок $[f(b), f(a)]$. Значит $f(b) = f(a)$ чтд.

Формула Ньютона–Лейбница. Пока что было 2 теоремы в этом направлении:

1) Пусть f дифференцируема, а f' ограничена. Тогда f' измерима (значит, интегрируема) и

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t)dt.$$

2) Пусть f интегрируема. Тогда $f(x) \overset{a.e.}{=} \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt\right)$.

Теорема. Пусть $f \in AC(a,b)$. Тогда f' существует почти всюду, интегрируема и

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\mu.$$

1) Без ограничения общности f неубывающая ($f \in AC \Rightarrow f \in BV$), теперь теорема Жордана и дополнение к ней).

2) Мы доказали на прошлой лекции, что производная монотонной функции суммируема: она измерима, как поточечный предел измеримых функций $\phi_h(x) = (f(x+h) - f(x))/h$, она почти всюду неотрицательна, справедливы оценки

$$\int_{[a,x]} f' d\mu \leqslant f(x) - f(a).$$

3) Рассмотрим функцию $\Phi(x) = f(x) - \int_{[a,x]} f'\ d\mu$. Эта функция неубывающая:

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = f(x_2) - f(x_1) - \int_{[x_1,x_2]} f' d\mu$$

но в силу той же теоремы из $x_1 \leqslant x_2$ следует $\displaystyle\int_{[x_1,x_2]} f' d\mu \leqslant f(x_1) - f(x_2)$.

4) $\Phi \in AC$ (как разность двух AC функций). По доказанной только что лемме $\Phi' \overset{a.e.}{=} 0$, отсюда $\Phi(x) \equiv \Phi(a) = f(a)$ по предыдущей теореме. чтд.

Итак, мы показали, что для AC функций операции дифференцирования и интегрирования обратные “почти всюду” (в смысле равенств и существования производных).

Сингулярные функции.

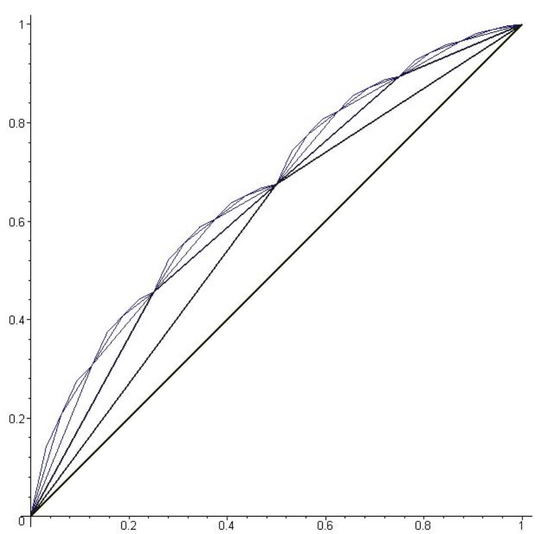
Определение. Непрерывную функцию с ограниченным изменением, имеющую почти всюду равную нулю производную, называют *сингулярной* функцией.

Термин “сингулярный” используется в других местах (сингулярные уравнения, функция Дирака, сингулярная матрица, сингулярное разложение).

Мы знаем канторову лестницу. Это сингулярная функция. Заметим, что именно канторову лестницу, построенную по канторову множеству меры ноль: чтобы производная надежно была равна нулю на множестве полной меры.

Бывает ещё функция Салема и функция Минковского. Процитирую Википедию: *“Сингулярная функция встречается при изучении последовательности пространственно модифицированных фаз или структур в твёрдых телах и магнетиках, описываемых в модели Френкеля-Конторова.”*

Если взять канторово множество ненулевой меры s, и на нем сделать соответствующую канторову лестницу, то она будет Липшицева и, следовательно, AC. Это точно так для симметричного канторового множества, на нем производная почти всюду равна $1/s$.



Это начало конструкции строго монотонной функции, производная которой почти всюду равна 0 (Рисс, 1952). Зафиксируем $t \in (0,1)$. Положим $f_0(x) = x$, предположим, что f_n определена, пусть $x_{k,n} = k2^{-n}$, $k = 0, \dots, 2^n$, определим

$$f_{n+1}\left(\frac{x_{k,n} + x_{k+1,n}}{2}\right) = \frac{1-t}{2} f_n(x_{k,n}) + \frac{1+t}{2} f_n(x_{k+1,n}),$$

между точками $x_{k,n}$ и $\frac{x_{k,n}+x_{k+1,n}}{2}$, а также между точками $\frac{x_{k,n}+x_{k+1,n}}{2}$ и $x_{k+1,n}$ продолжим функцию f_{n+1} линейно. Очевидно, что каждая функция f_n монотонно возрастает, непрерывна, последовательность $f_n(x)$ монотонная и ограниченная $\Rightarrow f_n \to f$.

Покажем, что f непрерывна, строго монотонна, и что $f' \overset{a.e.}{=} 0$.

Последовательность $f_n(x_{k,m})$ при любых k, m стабилизируется.

Пусть $x \in [0,1]$, $x \neq x_{k,m}$ ни при каких k, m.

Возьмём последовательность интервалов $(x_{k,n}, x_{k+1,n}) \ni x$, при каждом n найдется соответствующее $k = k(n)$. По построению $f_{n+1}(x_{k(n+1)+1,n+1}) - f_{n+1}(x_{k(n+1),n+1}) = \frac{1\pm t}{2}\big(f_n(x_{k(n)+1,n}) - f_n(x_{k(n),n})\big)$.

Так как $f_n(x_{k,n}) = f(x_{k,n})$ и $f_n(x_{k+1,n}) = f(x_{k+1,n})$, то

$$f(x_{k+1,n+1}) - f(x_{k,n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big), \quad \text{поэтому} \quad f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 \pm t}{2}.$$

отсюда следует $f(x_{k+1,n}) > f(x_{k,n})$ и $f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) \to 0$. Поэтому f монотонная и непрерывная.

Производная f' в тех точках, где она существует (неизвестно как их выразить, но почти всюду!) равна пределу выражения

$$2^n\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big) = \prod_{k=1}^{n}(1 \pm t).$$

Здесь $1 + t > 1,\ 1 - t < 1$. Это бесконечное произведение всегда расходится, частичные произведение стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо ни к чему. Но мы-то знаем, что предел частичных произведений существует почти всюду! Значит он равен 0, чтд.

Берем канторову лестницу $c(x, \Delta) : [0, 1] \to R$: на промежутке Δ копия обычной, но набирающая высоту $|\Delta|$ на промежутке Δ, равная 0, левее Δ, и равная $|\Delta|$, правее Δ. Нумеруем все промежутки постоянства $c(x, [0, 1])$: $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \ldots$ и выписываем монотонные функции $c(x, \Delta_1^1), c(x, \Delta_1^2), \ldots$

Потом берем все промежутки постоянства $\Delta_2^1, \Delta_2^2, \ldots$ всех функций $c(x, \Delta_1^k)$ и на них строим последовательность функций $c(x, \Delta_2^1), c(x, \Delta_2^2), \ldots$.

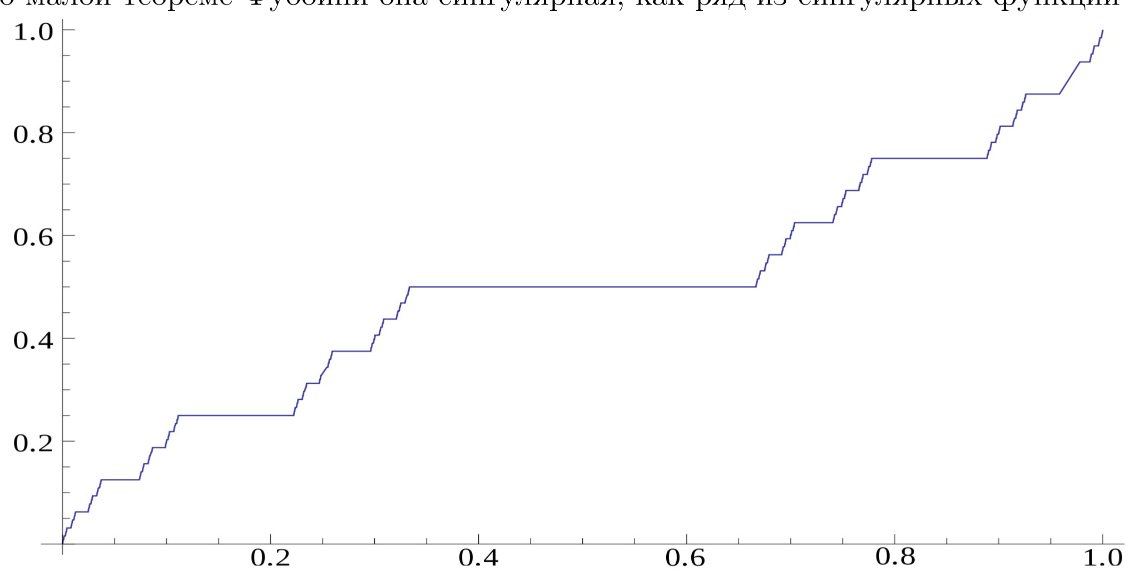
А теперь берем сумму

$$f(x) = c(x, [0, 1]) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} c(x, \Delta_n^k).$$

Это монотонная ограниченная функция, так как при каждом n

$$\sum_{k=1}^{\infty} c(x, \Delta_n^k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c(1, \Delta_n^k) = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_n^k| = 1,$$

то $f(1) = 2$. По построению, у неё нет промежутков постоянства, она строго монотонная. Очевидно, что по малой теореме Фуббини она сингулярная, как ряд из сингулярных функций



Это лучшая картинка канторовой лестницы из интернета.

Лекция 13 (13 февраля 2013)

На прошлой лекции мы завершили доказательство теоремы о том, что если $f \in AC(a,b)$, то f' существует почти всюду, интегрируема и

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\mu.$$

Вместе с теоремой о том, что

$$f(x) \overset{a.e.}{=} \frac{d}{dt}\Big(\int_{[a,x]} f d\mu \Big)$$

это описывает класс применимости аналога формулы Ньютона-Лейбница для интеграла Лебега. Фактически была доказана теорема о том, что

$$f \in AC \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\mu.$$

Ещё мы рассмотрели сингулярные функции, я привёл один пример сингулярной функции (на основе канторовой лестницы) почти явно, которая строго возрастает, но $f' \overset{a.e.}{=} 0$.

Функция скачков. Пусть $x_n \in (a,b)$ — конечное или счетное множество точек. Пусть даны две последовательности u_n и v_n, причем $\sum(|u_n| + |v_n|) < \infty$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n; \\ u_n, & x = x_n; \\ u_n + v_n, & x > x_n. \end{cases}$$

Тогда ряд $s = \sum f_n$ сходится, его сумма $s(x)$ называется *функция скачков*. Верно равенство

$$s(x) = \sum_{x_n \leqslant x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n.$$

Если u_n и v_n неотрицательные, то функция скачков монотонно не убывает.

Теорема. Всякая монотонная функция есть сумма непрерывной функции и функции скачков.

Агитация. Всякая конечная функция, имеющая не более счетного количества разрывов первого рода, часто тоже может быть представлена в таком виде.

Пусть есть BV-функция f. Тогда у нее есть только разрывы первого рода — скачки. И их не более чем счетное число. Берем x_n — точки разрыва, u_n и v_n — величины скачков. Строим по ним функцию скачков s. Тогда функция $f - s \in C$.

Теорема. Всякая BV-функция есть сумма функции скачков и непрерывной BV-функции.

Теорема. Всякая непрерывная BV-функция есть сумма абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что функция f монотонна. По теореме Лебега f' существует почти всюду и неотрицательна. Положим

$$f_{ac}(x) = \int_a^x f'(t)dt, \qquad f_s(x) = f(x) - f_{ac}(x).$$

Функция f_{ac} абсолютно непрерывна, и не убывает, $f_s' \overset{a.e.}{=} 0$ чтд.

На закуску: **Теорема Банаха об индикатрисе**.

Рассмотрим $f : [a, b] \to \mathbb{R} \in C$. Построим целочисленную функцию $N(y, f)$, значения которой равно количеству различных корней уравнения $f(x) = y$. Не алгебраическому количеству, а просто количеству. Функция N может принимать значения 0 и ∞, бесконечность может быть континуум или счетная.

Если непрерывная функция имеет ограниченную вариацию (функция N — финитна), то

$$\bigvee_a^b f = \int_{-\infty}^{+\infty} N(y, f)dy = \int_{\min f}^{\max f} N(y, f)dy.$$

Нарисовать картинку, пример.

Сказать, что для отображений в $\mathbb{R}^n$ так можно определять вариацию отображений.

Меры Лебега-Стильтьеса

Другие меры на прямой. $F : [0, 1]$ — неубывающая, непрерывная слева[1] функция. Положим

$$m(a, b) = F(b) - F(a+0),\ m[a, b] = F(b+0) - F(a),\ m(a, b] = F(b+0) - F(a+0),\ m[a, b) = F(b) - F(a).$$

Функция m интервала неотрицательна и аддитивна. Применяя к ней "обычные" рассуждения, мы можем построить некоторую меру μ_F. При этом совокупность $\mathfrak{A}_F$ множеств, измеримых относительно данной меры, замкнута относительно операций взятия счетных сумм и пересечений, а мера μ_F будет σ-аддитивна. Класс $\mathfrak{A}_F$ множеств, измеримых относительно μ_F, будет, вообще говоря, зависеть от выбора функции F. Однако при любом выборе F открытые и замкнутые множества, а следовательно, и все их счетные суммы и пересечения заведомо будут измеримы. Меры, получаемые с помощью той или иной функции F, называются мерами Лебега - Стилтьеса. В частности, функции $F(t) = t$ отвечает обычная мера Лебега на прямой.

Пример 1. Если F — функция скачков, причем x_k — точки разрыва, а h_k — величины скачков в соответствующих точках.

Тогда все подмножества $E \in [a, b]$ измеримы и $\mu_F(E) = \sum_{x_k \in E} h_k$.

Мера, построенная по функции скачков называется *дискретной* мерой. Если мера μ_F целиком сосредоточена на конечном или счетном множестве точек (это будет в том случае, когда множество значений функции F конечно или счетно), то она называется дискретной.

[1] Предел слева равен значению функции.

Пример 2. Пусть F — абсолютно непрерывная неубывающая функция, $f \overset{a.e.}{=} F'$ — её производная. Тогда мера μ_F определена на всех измеримых по Лебегу подмножествах E и

$$\mu_F(E) = \int_E f(x)dx.$$

По теореме Лебега справедлива формула Ньютона-Лейбница, что и нужно. Такая мера μ_F называется абсолютно *непрерывной*.

Альтернативное определение: если мера μ_F такова, что она равна 0 для любого множества, обычная лебегова мера μ которого равна 0, то мера μ_F называется *абсолютно непрерывной*.

Пример 3. Если F — сингулярная непрерывная функция, то отвечающая ей мера μ_F называется *сингулярной*, она сосредоточена на множестве меры ноль, на котором F' или отлична от нуля, или не существует.

Теорема. Всякая мера μ_F представима как сумма абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной мер.

Интеграл Лебега-Стильтьеса.

Интегралом Лебега-Стильтьеса называется обычный интеграл по мере Лебега-Стильтьеса

$$\int_{[a,b]} g(x)d\mu_F(x) = \int_{[a,b]} g(x)\,dF.$$

В частных случаях, рассмотренных выше, всё “просто”.

1. Если мера дискретная, то

$$\int_{[a,b]} g(x)\,dF = \sum f(x_k)h_k.$$

2. Если F — абсолютно непрерывная функция, то

$$\int_{[a,b]} g(x)d\,F = \int_{[a,b]} g(x)F'(x)\,dx.$$

3. Если F — сингулярная функция... определение понятно, а свести к внятным формулам не выходит. У вас была одна задача: $\int_{[0,1]} x\,d\big(c(x)\big)$. Давно, в листочке 9. Это совсем не простая задача

Применения к теории вероятностей.

В теории вероятностей важную роль играют функции, определенные на $\mathbb{R}$, особенно важен случай $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$ — функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$. Матожидание и дисперсия — это

$$M\xi = \int_{\mathbb{R}} x\,dF(x), \qquad D\xi = \int_{\mathbb{R}} (x - xi)^2\,dF(x).$$

Интеграл по BV-функциям. Естественно, можно всё определить для BV-функций вместо монотонных функций. Формально, все формулы очевидны.

Интеграл Римана-Стильтьеса.

Вернемся снова к интегралу типа Римана, который называется *интеграл Римана-Стильтьеса.*

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C$ и F — монотонно непрерывная слева возрастающая функция (или BV). Возьмём разбиение $[a, b]$ точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, возьмём на каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ по точке θ_k. Рассмотрим интегральные суммы $s(n, x_k, \theta_k) = \sum\limits_{n=1}^{n} f(\theta_k)\Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big)$. Если при уменьшение мелкости разбиения к нулю интегральные суммы стремятся к общему пределу $\mathcal{I}$, не зависящему ни от разбиения, ни от выбора точек θ_k, то этот предел $\mathcal{I}$ называется *интегралом Римана-Стильтьеса* и обозначается $\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\, dF(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall n, x_k, \theta_k : |x_k - x_{k-1}| < \delta \ \text{ справедливо } \ |s(n, x_k, \theta_k) - \mathcal{I}| < \varepsilon.$$

Теорема о среднем. $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f(x) dF(x)\right| \leqslant \max|f| \bigvee\limits_a^b F.$

Теорема. Если f непрерывна, то интеграл РС существует и совпадает с интералом ЛС.

Доказательство. Интегральная сумма — это интеграл Лебега

$$\sum_{n=1}^{n} f(\theta_k)\Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big) = \int_a^b f_n(x)\, dF(x),$$

от ступенчатой функции $f_n(x) = \theta_k$ при $x \in [x_{k-1}, x_k)$. Очевидно, что есть $\rightrightarrows$ сходимость. чтд

Линейность по интегрируемой функции и по мере + аддитивность по промежутку.

Предельный переход под знаком интеграла в интеграле Стильтьеса. По подинтегральной функции теоремы естественные, а по F — называются теоремы Хелли.

Подробно доказывать не буду, ознакомительно приведу формулировки.

Теорема Хелли 1. Пусть $F_n \in BV \to F$ поточечно, причем $\bigvee_a^b F_n \leqslant K$. Тогда $F \in BV$ и

$$\lim \int_{[a,b]} f(x) dF_n(x) = \int_{[a,b]} f(x) dF(x).$$

1. $F \in BV$ следует из определения, рассмотрим разбиение и все просто.

2. Приблизим f ступенчатой, для ступенчатой все интегралы будут суммы, в них можно перейти к пределам. А потом сказать, что ступенчатые хорошо приближают f.

Теорема Хелли 2. Из всякого бесконечного множества равномерно ограниченных функций $f \in BV$, имеющих равномерно ограниченные вариации можно выбрать сходящуюся поточечно подпоследовательность.

Зачем всё это надо? В качестве финальной точки сформулирую теорему Рисса, без доказательства, её нормально будете проходить на функциональном анализе.

Теорема. Всякий линейный непрерывный функционал в пространстве $C[a, b]$ имеет вид

$$L(f) = \int_a^b f(x)\, dF(x), \qquad \text{при некоторой функции } F \in BV.$$

Литература.

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа, Харьков, 2006, 616 стр.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, 1976, 543 стр.

3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной, М., Наука, 1975, 480 стр.

4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, М., Мир, 1979