I Курс. Задание по дискретной математике №1

Дата выдачи 20.02.2013 Срок сдачи 13.03.2013

1. Вычислите производящую функцию для последовательности

$$a_0 = n^3,\ a_1 = (n+1)^3,\ \ldots,\ a_k = (n+k)^3, \ldots$$

Приемлемым является ответ в виде суммы фиксированного (не зависящего от n) числа слагаемых.

2. Докажите соотношения

$$\text{а)}\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{2^{(n+2)} - n - 3}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{б)}\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k} = \frac{n2^{(n+1)} + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

3. Производящая функция последовательности (a_n) имеет вид $\dfrac{1-s^4}{1-s^3}$. Найдите линейное рекуррентное соотношение наименьшего порядка, которому удовлетворяют ее члены, начиная с некоторого номера n. Начиная с какого номера n члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

4. Пусть последовательность задана как значения квазимногочлена $n^2+(-1)^n$. Напишите для нее производящую функцию. Каков наименьший порядок линейного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет эта последовательность?

5. Известно, что члены последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяют соотношениям

а) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + 1 = a_{n+k}, \quad a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 1;$

б) $2(na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \quad a_0 = 0;$

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} = a_{n+1}, \quad a_0 = a_1 = 1.$

Найдите производящую функцию последовательности. В случае, если производящая функция рациональна, выпишите линейные рекуррентные соотношения на ее коэффициенты. В противном случае докажите иррациональность производящей функции.

г) Постройте выражение для членов последовательности б) в виде квазимногочленов. Вычислите $a_{99}, a_{100}, a_{101}, a_{102}$.

6. Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в k-м снизу горизонтальном ряду треугольника Дика. (см. Рис.1)

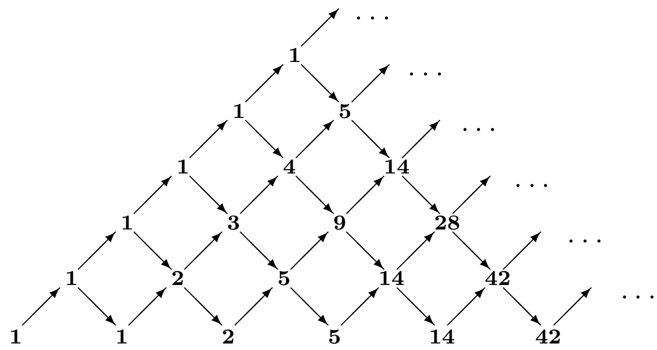

Рис. 1: Треугольник Дика.

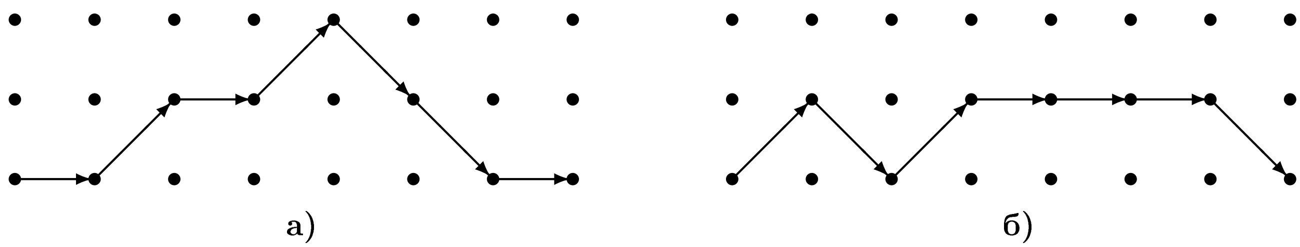

Рис. 2: Пути Моцкина.

7. Непрерывные ломаные, составленные из векторов $(1,1)$ и $(1,-2)$, начинающиеся в начале координат $(0,0)$, заканчивающиеся на оси абсцисс в точке $(n,0)$ и лежащие целиком в верхней полуплоскости, будем называть косыми путями Дика. Как обычно, абсцисса n конечной точки пути называется его длиной. Обозначим k_n – число косых путей Дика длины n: $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$, $k_4 = k_5 = 0$, $k_6 = 3$, $\dots$. Найдите уравнение, задающее производящую функцию $K(s) = \sum_{n\geq 0} k_s s^n$ для косых путей Дика.

8. Пути Моцкина определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы $(1,0)$ (см. Рис.2). Среди всех путей Моцкина выделим подмножество путей, не содержащих горизонтальных векторов в самом нижнем ряду (например, из двух путей, изображенных на Рис.2, путь а) исключается из рассмотрения). Числа таких путей, состоящих из n векторов образуют последовательность μ_n: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = 6$ и т.д.

   а) Найдите производящую функцию для этой последовательности.

   б) Найдите производящую функцию от двух переменных, перечисляющую пути в треугольнике Моцкина (см. Рис.3).

9. Полимино – это область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток. Полимино называется стековым, если нижние горизонтальные отрезки его границы образуют один отрезок (см. рис.4). Назовем стековое полимино ‘одногорбым’, если любая горизонтальная линия пересекает его границу не более чем в двух точках или отрезках (см. рис.5).

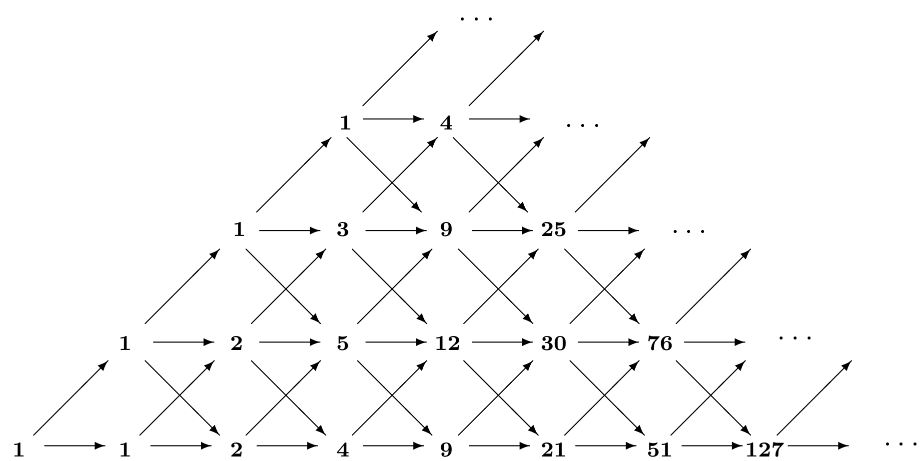

Рис. 3: Треугольник Моцкина.

а) Найдите число одногорбых стековых полимино с периметром $2n+4$.

б)* Найдите общее число стековых полимино с периметром $2n+4$.

10. а) На клетчатой плоскости нарисуем всевозможные пары ломаных, стартующие в начале координат и идущие по сторонам клеток вправо и вверх в точку с координатами $(m+1, n+1)$. Найдите число пар таких ломаных, которые имеют общими точками лишь начало $(0,0)$ и конец $(m+1, n+1)$, то есть не пересекаются и не соприкасаются по пути. Такие пары ломаных ограничивают параллелограммные полимино с фиксированными левым нижним – $(0,0)$ – и правым верхним – $(m+1, n+1)$ – углами (см. Рис.6).

    б)* На клетчатой плоскости рисуются всевозможные наборы из n не пересекающихся и не соприкасающихся друг с другом ломаных (таких же как в пункте а)), стартующих в точках с координатами $(0,0)$, $(-1,1)$, $(-2,2)$, $\ldots$,$(1-n, n-1)$ и заканчивающихся в точках с координатами (k,ℓ), $(k-1,\ell+1)$, $(k-2,\ell+2)$, $\ldots$,$(k+1-n,\ell+n-1)$. Постройте выражение для числа таких наборов.

11.* Найдите функцию $F(t)$, бесконечно дифференцируемую на вещественной прямой, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, t^n\,.$$

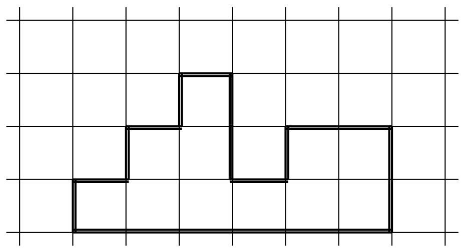

Рис. 4: Стековое полимино (не одногорбое).

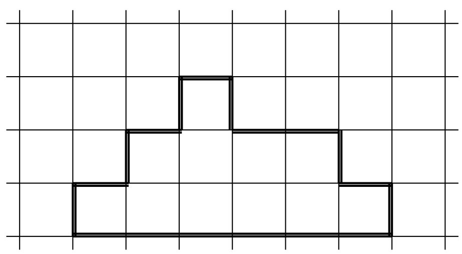

Рис. 5: Одногорбое стековое полимино.

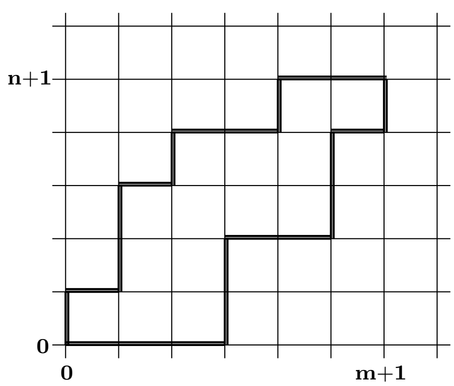

Рис. 6: Параллелограммное полимино.