Листок 10.

Алгебра. 1 курс, **19.02.2013**

Максимальный балл за этот листок ставится при решении из него любых 14 задач, с учетом действия знака **&** .
В этом листке все линейные пространства конечномерны, а характеристика поля отлична от 2.

10◇1$^{\&}$ Пусть $b(u,v)$ — билинейная форма на V. Рассмотрим отображения $f_{лев} : V \to V^*$ и $f_{прав} : V \to V^*$, сопоставляющие вектору $u \in V$ линейные функции на V, заданные, соответственно, формулами $f_{лев}(u)(w) = b(u,w)$ и $f_{прав}(u)(w) = b(w,u)$.
a) Докажите, что отображения $f_{лев}$ и $f_{прав}$ линейны и сопряжены друг другу, т.е. $f_{лев} = f^*_{прав}$.
b) Зафиксируем некоторый базис в V и рассмотрим двойственный базис в V^*. Как связаны матрицы отображений $f_{лев}$ и $f_{прав}$ с матрицей формы b?

10◇2 Пусть $K \subset V$ — ядро симметрической или кососимметрической формы b, а линейное подпространство $U \subset V$ таково, что $V = K \oplus U$. Докажите, что ограничение формы b на подпространство U невырождено.

10◇3 Пусть $b(u,v)$ — невырожденная билинейная форма на V, причем ее ограничение на линейное подпространство $U \subset V$ также невырождено. Докажите, что множества
$U^\perp = \{v \in V, \quad b(u,v) = 0 \ \forall\ u \in U\}$ и ${}^\perp U = \{v \in V, \quad b(v,u) = 0 \ \forall\ u \in U\}$ являются линейными подпространствами в V, причем $V = U \oplus\ U^\perp$ и $V = U \oplus\ {}^\perp U$.

10◇4$^{\&}$ **a)** Пусть $b(u,v)$ — симметрическая билинейная форма на V. Подпространство $U \subset V$ называется **изотропным**, если ограничение формы b на U нулевое. Докажите, что если форма $b(u,v)$ невырожденная, то $\dim U \le \frac{1}{2}\dim V$.
b) Докажите, что над любым полем существует симметрическая невырожденная билинейная форма, для которой оценку предыдущего пункта нельзя улучшить, а над алгебраически замкнутым полем эту оценку нельзя улучшить для любой невырожденной формы.

10◇5 Пусть $\dim V = 3$, зафиксируем в нем базис и некоторый вектор $a \in V$, записываемый в этом базисе вектор-столбцом $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.
a) Докажите, что $b_a(u,v) = \det(\hat{u}\hat{v}\hat{a})$ является кососимметрической билинейной формой на V. Найдите матрицу формы b_a. Докажите, что любая ненулевая кососимметрическая билинейная форма на V имеет вид b_a для подходящего вектора $a \in V$.
b) Рассмотрим отображение $f_{лев} : V \to V^*$, соответствующее форме b_a из предыдущего пункта. Докажите, что его ядро одномерно, и, следовательно, представляет собой точку $p \in \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим соответствующее проективное отображение $\bar{f}_{лев} : \mathbb{P}(V) \setminus \{p\} \to \mathbb{P}(V^*)$, сопоставляющее каждой отличной от p точке плоскости $\mathbb{P}(V)$ прямую. Дайте чисто геометрическое описание отображения $\bar{f}_{лев}$.

10◇6 Пусть $\dim V = 3$, рассмотрим билинейную форму b, заданную в базисе e_0, e_1, e_2 матрицей $\hat{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим отображение $f_{лев} : V \to V^*$ и соответствующее ему проективное отображение $\bar{f}_{лев} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, сопоставляющее каждой точке на плоскости $\mathbb{P}(V)$ прямую. Дайте чисто геометрическое описание отображения $\bar{f}_{лев}$. (Это удобно сделать в аффинной карте $x_0 \neq 0$.)

10◇7$^{\&}$ Может ли квадратичная форма на вещественном двумерном пространстве иметь
- ровно одно одномерное изотропное подпространство?
- ровно два одномерных изотропных подпространства?
- ровно три одномерных изотропных подпространства?

Какие из этих случаев возможны для невырожденной формы?

10◇8 Пусть поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и $\dim V = 3$, рассмотрим квадратичную форму q. На проективной плоскости $\mathbb{P}(V)$ рассмотрим множество $X \subset \mathbb{P}(V)$, заданное уравнением $q(u) = 0$.

a) Опишите множество X в случаях, когда ранг формы q равен 1, 2 и 3; докажите, что любая прямая на $\mathbb{P}(V)$ имеет с X либо одну, либо две общие точки, либо содержится в X.

b) Докажите, что если ранг формы q равен 3, то общая точка одна тогда и только тогда, когда ограничение формы b на соответствующее этой прямой двумерное подпространство вырождена. (Такая прямая называется касательной к кривой X.)

10◇9$^{\&}$ Приведите пример невырожденной квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве V, имеющей

• только одномерные изотропные подпространства.

• двумерные изотропные подпространства.

Какая может быть в каждом из этих случаев сигнатура формы q? Опишите в каждом случае множество точек трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, заданное уравнением $q(u) = 0$.

10◇10$^{\&}$ На линейном пространстве вещественных $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ задана билинейная форма $b(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Найдите ее ранг, сигнатуру и базис, в котором она приводится к сумме квадратов.

10◇11$^{\&}$ В условиях предыдущей задачи найдите ортогонал к подпространству симметрических матриц и к подпространству верхнетреугольных матриц.

10◇12 Пусть в условиях задачи **10** билинейная форма задана формулой $b(X, Y) = \operatorname{tr} XY$. Найдите ее ранг, сигнатуру и базис, в котором она приводится к сумме квадратов.

10◇13 Для каждой из форм задач **10** и **12** найдите ядро и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.

10◇14 Докажите, что функция на пространстве вещественных 2×2 матриц, сопоставляющая матрице ее определитель, является квадратичной формой. Напишите матрицу соответствующей симметрической билинейной формы в каком-нибудь базисе. Найдите ранг и сигнатуру этой формы. Найдите ядро этой формы и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.

10◇15$^{\&}$ В линейном пространстве вещественных функций $T_n = \{\sum_{m=0}^{n} a_m \cos^m x, \quad a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}\}$ задана билинейная форма $b(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x)dx$. Найдите ее ранг и сигнатуру. Найдите функции, который получаются из базиса $1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x$ в результате применения процесса ортогонализации Грамма-Шмидта.

10◇16$^{\&}$ В пространстве из задачи **15** форма задана формулой $b(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(\frac{\pi}{2} - x)dx$. Докажите, что эта билинейная форма симметрична, и найдите ее ранг и сигнатуру.

10◇17 Для каждой из форм задач **15** и **16** найдите ядро и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.