Статистическая физика.
Листок 2

1. **Классические гармонические осцилляторы.**

Рассмотрите N классических гармонических осцилляторов с координатами и импульсами p_i, q_i и гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\{p_i, q_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2} \right).$$

(а) Вычислите энтропию S как функцию внутренней энергиии U. (Указание: изменением масштабов длины и импульса можно превратить поверхность постоянной энергии в сферу. При больших N объем шарового слоя $2N$-мерного шара можно считать равным объему шара.)
(б) Вычислите энергию U и теплоемкость C_V как функцию температуры T и числа частиц N.
(в) Найдите совместную плотность вероятности импульса и координаты одного осциллятора $P(q, p)$. Вычислите среднюю кинетическую и потенциальную энергию осциллятора.

2. **Квантовые гармонические осцилляторы.**
Рассмотрите N независимых квантовых осцилляторов с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\{n_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n_i \right),$$

где микросотояние системы задается N квантовыми числами заполнения осцилляторов $n_i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $i = 1, \ldots, N$, принимающими любые неотрицательные целые значения.

(а) Вычислите энтропию S как функцию внутренней энергии U. (Указание: Число $\mathcal{N}(U)$ состояний с энергией U можно представить, как число способов разложить $M = \sum_i n_i$ шаров в N ящиков, или разделить одномерную цепочку из M шаров $N-1$ стенками.)

(б) Вычислите энергию U и теплоемкость C_V как функции температуры T, и числа частиц N.

(в) Найдите вероятность $f_1(n)$ обнаружиить осциллятор на уровне n.

(г) Прокомментируйте разницу квантового и классического осцилляторов.

3. **Магнитная восприимчивость Кюри.**
Рассмотрите N невзаимодействующих спинов, обладающих магнитными моментами в магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e_z}$, находящихся при температуре T. Работа совершаемая магнитным полем равна HM_z, где намагниченность есть полный магнитный момент системы, $M_z = \mu \sum_i m_i$, а μ– размерная константа. Пусть прекция спинов на ось z квантуется, т.е. пробегает дискретный набор $2s-1$ значений, задаваемых целыми числами $m_i = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$.

(а) Вычислите статсумму Гиббса $Z(T, H)$. (Воспользуйтесь тем, что больцмановский соответствующий макросостоянию (T, H) включает в себя работу магнитного поля.)

(б) Вычислите свободную энергию Гиббса $G(T, H)$, и покажите, что при малых H она равна

$$G(T, H) = G(T, 0) - \frac{N\mu^2 s(s+1)H^2}{6k_B T} + \mathcal{O}(H^4).$$

(в) Вычислите магнитную восприимчивость в нулевом поле $\chi = \partial M_z/\partial H|_{H=0}$, и покажите, что она описывается законом Кюри

$$\chi = c/T.$$

4. **Одномерный газ.**

Газ частиц в состоянии термодинамического равновесия помещается в одномерную ловушку. Соответствующее состояние описывается описывается начальной одночастичной функцией распределения $f_1(p, q, t = 0) = \delta(q)f(p)$, где $f(p) = \exp(-p^2/2mk_BT)/\sqrt{2\pi mk_BT}$.

(а) Стартуя с уравнения Лиуввиля выведите $f_1(p, q, t)$ и изобразите её в плоскости (p, q).

(б) Вычислите средние $\langle p^2 \rangle$, $\langle q^2 \rangle$.

(в) Предположим, что в $q = \pm Q$ помещены твердые стенки. Опишите, $f_1(p, q, t \gg \tau)$, где τ характерное релаксационное время в системе.