

Вопросы к коллоквиуму по алгебре за 3 модуль.

- 1) Определение матрицы перехода. Формула для пересчета координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
- 2) Определение матрицы перехода. Определение матрицы линейного оператора в данном базисе. Формула для пересчета матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому.
- 3) Определение двойственного линейного пространства. Определение двойственного базиса. Формула для пересчета коэффициентов линейной функции при переходе от одного базиса к другому.
- 4) Каноническое вложение $V \hookrightarrow V^{**}$; его изоморфность в конечномерном случае.
- 5) Определение сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора в двойственном базисе.
- 6) Определение билинейной формы, матрицы билинейной формы. Вычисление значения билинейной формы в координатах. Формула для пересчета матрицы билинейной формы при переходе от одного базиса к другому.
- 7) Равносильность задания билинейной формы на линейном пространстве V и линейного отображения из V в V^* . Как связаны матрицы билинейной формы и соответствующего линейного отображения?
- 8) Ядро симметрической билинейной формы. Взаимно-однозначное соответствие между симметрическими билинейными формами на линейном пространстве V с ядром $K \subset V$ и невырожденными билинейными формами на фактор-пространстве V/K .
- 9) Определение квадратичной формы. Вычисление значения квадратичной формы в координатах. Восстановление билинейной формы по квадратичной.
- 10) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа.
- 11) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Якоби.
- 12) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов над алгебраически замкнутым полем.
- 13) Положительно определенные формы над $\mathbb{R}$. Невырожденность положительной формы. Определитель матрицы положительной формы. Критерий Сильвестра.
- 14) Сигнатура квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Инвариантность сигнатуры ("закон инерции"). Вычисление сигнатуры с помощью главных угловых миноров матрицы формы.
- 15) Ортогонал к подпространству U (относительно невырожденной симметрической билинейной формы на линейном пространстве V). Его размерность в конечномерном случае. Условие разложимости в прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$ (рассмотреть также случай, когда U — конечномерно, а V не обязательно).
- 16) Определение изотропного вектора и изотропного подпространства. Оценка размерности изотропного подпространства; ее точность в случае алгебраически замкнутого поля.
- 17) Гиперболическая форма. Теорема о разложении пространства в ортогональную прямую сумму гиперболического и изотропного.

- 18) Гиперболическая форма. Теорема о разложении пространства в ортогональную прямую сумму гиперболического и изотропного.
- 19) Ортогональная группа невырожденной квадратичной формы. Примеры над полем $\mathbb{R}$ в двумерном случае для положительной и для гиперболической формы.
- 20) $SO(3)$.
- 21) Линейные операторы на пространстве с невырожденной формой. Соответствие между операторами и билинейными формами.
- 22) Линейные операторы на пространстве с невырожденной формой. Самосопряженные операторы.
- 23) Самосопряженные операторы в евклидовом пространстве. Существование ортонормированного собственного базиса.
- 24) Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям.
- 25) Кососимметрические формы.
- 26) Определение тензорного произведения линейных пространств. Его размерность в конечномерном случае.
- 27) Интерпретация пространства билинейных форм на линейном пространстве и пространства линейных отображений из одного пространства в другое как тензорных произведений.
- 28) Симметрические и кососимметрические тензоры.