КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА, математический анализ, 2 курс, 3 модуль, 2013
А.М. Красносельский

Лекция 14 (20 февраля 2013)

На предыдущей лекции мы завершили группу связанных тем: про меру, про измеримые функции и интегралы, а также примыкающую ко всему этому тему о дифференцируемости почти всюду разных странных функций (монотонных, абсолютно непрерывных, ограниченной вариации) и о связи интеграла Лебега и производной. Завершили тему интегралом Стильтьеса. Теперь мы рассмотрим простейшие и важнейшие пространства измеримых функций.

Пространства суммируемых функций. Пусть есть пространство (X, Σ, μ) с мерой. Я буду считать, что $\mu(X) < \infty$, однако многие конструкции возможны и без этого предположения (при этом надо предполагать существование исчерпывающих X последовательностей множеств конечной меры). Я иногда буду говорить об X с $\mu(X) = \infty$.

Рассмотрим множество измеримых функций, они образуют линейное множество. Рассмотрим число $\|x\| = \int_X |x(t)|\,dt$. Если мы отождествим все эквивалентные функции, то на множестве классов это будет норма (напомнить, что это значит, сказать про норма-полунорма: абсолютная однородность, неравенство треугольника, а вот $\|x\| = 0 \not\Rightarrow x = 0$). Пространство называется L_1. Пофилософствовать, про классы и функции, что говорим про функции, а формально — классы.

Безусловно, говорят, что "*последовательность функций сходится по норме* L_1" или просто "*норма функции в* L_1".

Свойства нормы (если отождествлять классы) очевидны. Расстояние — норма разности. Сходимость по этой норме часто называют *сходимостью в среднем.*

Если X конечное множество из n элементов, а мера μ — считающая, то пространство L_1 — это конечномерное пространство, с нормой $\sum |x_k|$. Это случай очень важный, его изучают отдельные науки :) но для нас не очень интересный. Я буду считать, что X — отрезок, а мера лебегова. Как и во многих других случаях, при необходимости всё переносится на общие ситуации.

Теорема. Пространство L_1 банахово, то есть полное.

Доказательство. Пусть f_n — фундаментальная последовательность:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n, m > N \ \text{ справедливо } \ \|f_n - f_m\|_{L_1} < \varepsilon.$$

Выберем подпоследовательность f_{n_k}: $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$. Из этого неравенства и теоремы Леви[1] следует, что ряд $\sum |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$ сходится почти всюду на X, поэтому и ряд $f_{n_1} + \sum (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ сходится почти всюду на X к некоторой f, частичные суммы ряда — это $f_{n_{k+1}} \to f$.

Из фундаментальности f_n следует, что $\forall \varepsilon > 0$ для всех достаточно больших ℓ, k справедливо

$$\int_X |f_{n_k}(t) - f_{n_\ell}(t)|dt < \varepsilon.$$

[1]**Теорема Леви.** Пусть f_n монотонна при всех $x \in A$, все f_n интегрируемы и пусть: $\int_A |f_n(x)|dx \leqslant K$. Тогда почти всюду существует конечный предел $f \leftarrow f_n$, f интегрируема на A и можно переставлять предел с интегралом.

В силу леммы-теоремы Фату (есть равномерная ограниченность интеграла!) в этом неравенстве можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\ell \to \infty$. Получаем

$$\int_X |f_{n_k}(t) - f(t)|dt \leqslant \varepsilon.$$

То есть, $f \in L_1$. Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и сама последовательность сходится. чтд

Замечание 1. Из этого всего следует, что из сходящейся по норме L_1 последовательности можно извлечь почти всюду сходящуюся подпоследовательность.

Это же следует и из другой конструкции: в силу неравенства Чебышева

$$\mu\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \sigma\} \leqslant \sigma^{-1} \int_X |f(x) - g(x)|d\mu$$

поэтому из сходимости в среднем следует сходимость по мере, поэтому существует подпоследовательность, сходящаяся почти всюду (теорема Рисса).

Замечание 2. Из сходимости в среднем не следует сходимость почти всюду. Пример: характеристические функций отрезков $\Delta_{k,n} = [k2^{-n}, (k-1)2^{-n}]$: $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{3,2}, \Delta_{4,2}, \ldots$

Замечание 3. Из сходимости почти всюду не следует сходимость в среднем. Пример: $f_n(x) = n(n-1)\chi_{[1/n, 1/(n-1)]}(x)$, очевидно, что есть поточечная сходимость к нулю. Однако, сходимости в среднем к нулю нет.

Замечание 3a. Из сходимости по мере ограниченной последовательности функций следует сходимость в среднем: из $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $|f - f_n| \leqslant K$ следует

$$\begin{aligned}\int_X |f(t) - f_n(t)|dt &= \int_{\{t:|f(t)-f_n(t)|\leqslant\delta\}} |f(t) - f_n(t)|dt + \int_{\{t:|f(t)-f_n(t)|>\delta\}} |f(t) - f_n(t)|dt \\ &\leqslant \delta\ \mu(X) + K\mu(\{t : |f(t) - f_n(t)| > \delta\})\end{aligned}$$

Замечание 4. Полнота L_1 справедлива и при бесконечной мере!

Всюду плотные множества в L_1.

1. В пространстве L_1 всюду плотны разные системы функций.

2. Множество функций, принимающих счетное множество значений, поэтому и множество функций, принимающих конечное множество значений.

3. Следовательно, множество ограниченных функций.

4. Множество непрерывных функций. Можно это доказывать, как следствие теоремы Лузина[2] и абсолютной непрерывности интеграла. А можно, исходя из более общей конструкции.

По норме L_1 можно приблизить характеристическую функцию любого множества.

Конструкция ниже работает в любом метрическом пространстве с мерой, если все открытые и все замкнутые множества измеримы и для любого измеримого множества M, мера есть $\inf_{G \supset M} \mu(G)$, супремум по всем открытым, как раз как для меры Лебега.

[2]Теорема Лузина: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ измерима $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi(x) \in C[a, b]$: справедливо $\mu(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$.

Пусть M — измеримое множество, $F \subset M \subset G$, причем F — замкнутое, G — открытое, $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x,F) + \rho(x, X \setminus G)}, \qquad \rho(x,F) = \inf_{y \in F} \rho(x,y).$$

На F эта функция равна 1, на $X \setminus G$ она равна 0, на $G \setminus F$ она из $(0,1)$. Очевидно, $\|\chi_M - \varphi_\varepsilon\|_{L_1} < \varepsilon$. чтд

От приближений характеристических функций переходим к приближениям функций, принимающих конечное множество значений.

5. В L_1 на отрезке есть счетное всюду плотное множество.

Например, множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Вообще, на эту тему есть небольшая наука про то, какой должно быть множество и мера на нем, чтобы в L_1 было счетное всюду плотное множество.

Пространство L_2.

L_1 не является пространством со скалярным произведением, проверяется равенством параллелограмма $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, оно не выполнено для $\chi_A(x)$ и $\chi_{X \setminus A}(x)$: $\mu(A) = \frac{1}{2}\mu(X)$, $2(\mu(X))^2 = 4(\mu(A))^2$.

Кстати, норма в C тоже не порождена никаким скалярным произведением.

Точно так же, как норма в $\mathbb{R}$ в виде суммы модулей координат редко удобна, точно так же и норма в L_1 не так удобна, как другая норма.

Определение L_2: измеримая функция, у которой интегрируемый квадрат и

$$(x,y)_{L_2} = \int_X x(t)y(t)\,d\mu, \qquad \|x\|^2_{L_2} = \int_X x^2(t)\,d\mu.$$

Еще раз напомню, что элементами L_2 являются классы функций, но обычно говорят, что функции. Это не приводит к недоразумениям.

Еще раз напомню, что мера X конечна. Иначе получится, что у неинтегрируемой функции интегрируемый квадрат. А так — важное свойство $L_2 \subset L_1$. Здесь можно говорить о теоретико-множественном отношении, и, также, о подчиненности нормы: $\|\cdot\|_{L_1} \leqslant c\|\cdot\|_{L_2}$, поэтому из сходимости/фундаментальности в L_2 следует сходимость/фундаментальность в L_1.

Подчиненность нормы вытекает из простого неравенства Коши–Буняковского:

$$\|x\|_{L_1} = \int_X |x|\,d\mu = \int_X 1 \cdot |x|\,d\mu \leqslant \sqrt{\int_X 1\,d\mu}\,\sqrt{\int_X |x|\,d\mu} = \sqrt{\mu(X)}\|x\|_{L_2}$$

Неравенство Коши–Буняковского. Рассматриваем выражение $(f+tg, f+tg) = (f,f) + 2t(f,g) + t^2(g,g)$, оно неотрицательно при всех t. Это справедливо iff дискриминант не положителен, то есть $(f,g)^2 \leqslant (f,f)(g,g) \;\Rightarrow\; |(f,g)| \leqslant \sqrt{(f,f)(g,g)}$ чтд.

Неравенство Коши-Буняковского в L_2 эквивалентно неравенству треугольника:

$$\sqrt{\int (f+g)^2 d\mu} \leqslant \sqrt{\int f^2 d\mu} + \sqrt{\int g^2 d\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \int fg\; d\mu \leqslant \sqrt{\int f^2 d\mu}\sqrt{\int g^2 d\mu}.$$

Величина $\|f-g\|^2_{L_2}$ называется *средним квадратичным уклонением.*

Сходимость по норме называется *сходимостью в среднем квадратичным.*

Полнота пространства L_2.

1. Из фундаментальности в L_2 следует фундаментальность в L_1.

2. Поэтому, есть подпоследовательность сходящаяся почти всюду, так же как и при доказательстве полноты L_1.

3. Теперь так же как и при доказательстве полноты L_1, напишем неравенство

$$\int_X |f_{n_k}(t) - f_{n_\ell}(t)|^2 dt < \varepsilon$$

и перейдем по лемме Фату к пределу при $\ell \to \infty$. чтд.

Гильбертово пространство.

Все гильбертовы пространства, содержащие счетное всюду плотное множество, изоморфны друг другу. Соответственно, L_2 изоморфно ℓ_2.

Комплексное пространство L_2. Всё легко переносится на комплексный случай. Скалярное произведение $(f,g) = \int f\,\bar g\,d\mu$.

Пространство L_p.

Разные виды сходимости.

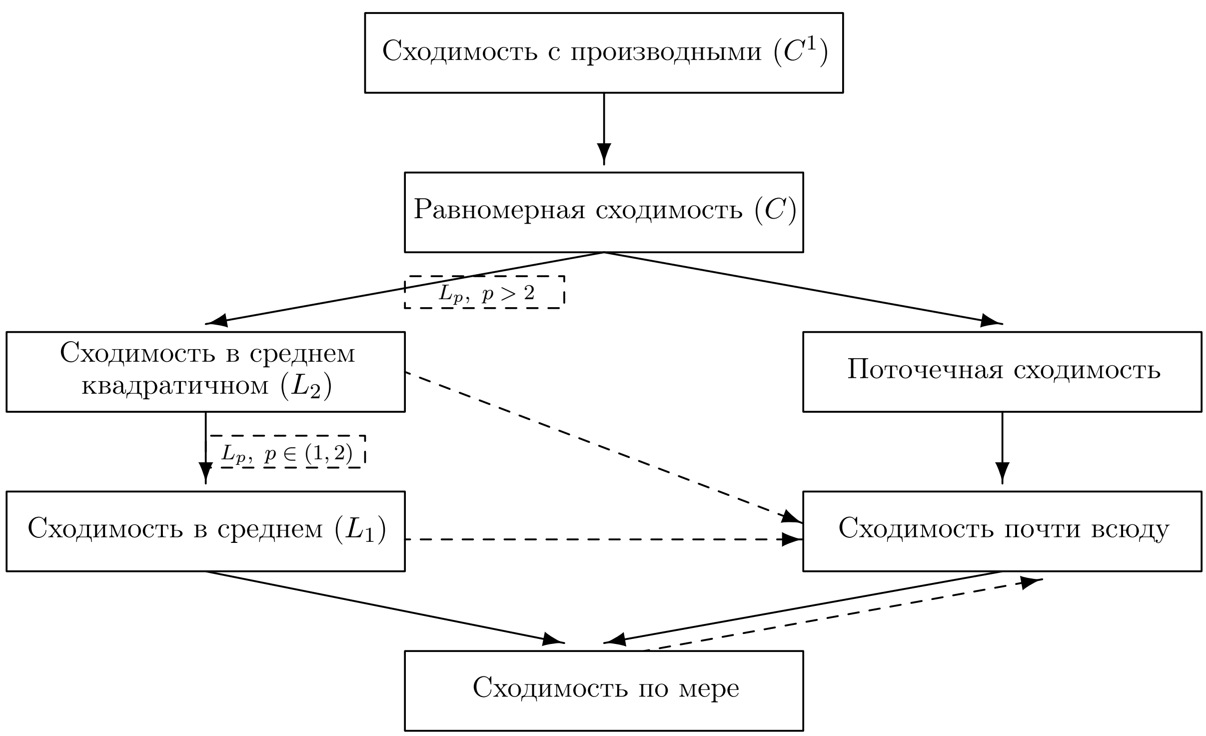


Рис. 1: Разные виды сходимости ($\mu(X) < \infty$), пунктир — выбор подпоследовательности

Сказать тут про другие L_p, что они где-то между квадратиками и про пространства наверху типа $W^{2,1}$.

Базисы в L_2.

1. Самый простой базис в $L_2(0,1)$: берем рациональные числа r_k, по ним строим характеристические функции $\chi_{(0,r_k)}$.

Ясно, что их линейные комбинации образуют плотное множество. Если захотим, из них можно построить ортогональную или ортонормированную систему. Последовательной ортогонализацией, как было в линейной алгебре.

Берем 1 элемент, нормируем, потом из двумерного пространства, натянутого на 2 первых находим ортогональный первому, нормируем, потом из трехмерного пространства, натянутого на 3 первых находим ортогональный двум первым, нормируем. В результате получаем ортонормированный базис.

2. Тригонометрический базис в $L_2(0,2\pi)$. Сказать чуть-чуть, обещать подробно изучать позднее. Рассмотрим ортонормированную систему функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}.$$

Когда-то бездоказательно рассказывал, что эта система плотна в множестве периодических функций.

3. Многочлены Лежандра на $[-1,1]$. Сначала берем многочлены $1, x, x^2, \ldots$. Потом ортогонализуем. Получаются многочлены $P_n(x) = \frac{d^n}{dt^n}(x^2-1)^n$. Многочлены $L_n = 2^{-n}P_n/n!$ называются многочленами Лежандра. Они не нормированы.

4. Если брать не обычную меру Лебега, то будет другое L_2 (может быть!). Там другие системы, например, бывают многочлены Чебышева $T_n(x) = \sin(n \arccos x)$. Это будет, если брать L_2 с весом $(1-x^2)^{-1/2}$. Они важны в задачах интерполирования.

5. Базис в $L_2(\mathbb{R})$ — функции Эрмита, ортогонализация системы функций $x^n e^{-x^2/2}$, $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$, $H_n(x) = c_n(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$

6. Базис в $L_2(\mathbb{R}^+)$ — функции Лагерра, ортогонализация системы функций $x^n e^{-x}$.

Лекция 15 (06 марта 2013)

На прошлой лекции введены пространства L_1 и L_2, доказана их полнота, приведены примеры базисов в этих пространствах (для различных областей определения функций, входящих в L_p).

Сейчас быстро повторю абстрактную теорию евклидовых-гильбертовых пространств, следуя Колмогорову–Фомину. Я предпочитаю писать и говорить "Евклид", но "Эвклид" ничуть не хуже.

Абстрактная теория.

1. Определение евклидова пространства, скалярное произведение и норма. Пусть есть линейное пространство, причем в нем задана билинейная функция $(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющая

$$(x,y)=(y,x), \quad (x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2), \quad (\lambda x,y)=\lambda(x,y), \quad (x,x)\geqslant 0, \quad (x,x)=0 \ \Leftrightarrow\ x=0.$$

Это в случае вещественного пространства и вещественнозначного скалярного произведения. В случае комплексного пространства надо брать комплекснозначное скалярное произведение и чуть изменить аксиоматику:

$$(x,y)=\overline{(y,x)}, \quad (x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2), \quad (\lambda x,y)=\lambda(x,y), \quad (x,x)\geqslant 0, \quad (x,x)=0 \ \Leftrightarrow\ x=0.$$

Я буду сейчас говорить о вещественном пространстве, в комплексном пространстве все так же.

2. Неравенство Коши-Буняковского ($(tx+y,tx+y)=...,\ D<0$). Из НКБ следует, что величина $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ является нормой, точнее из НКБ следует неравенство треугольника:

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

3. Непрерывность линейных операций: $x_n\to x,\ y_n\to y,\ \lambda_n\to\lambda\ \Rightarrow\ (\lambda_n x_n,y_n)\to(\lambda x,y)$.

4. Ортогональная система — множество векторов, попарно ортогональных. Полная ортогональная система (наименьшее содержащее эту систему замкнутое линейное подпространство совпадает со всем пространством) называется *ортогональным базисом*.

Теорема об ортогонализации. Пусть есть линейно независимая система x_n в евклидовом пространстве. Тогда $\exists$ ортонормированная система $y_n=\sum_{k=1}^n a_{n,k}x_k$ с невырожденными матрицами $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$, При этом $E_n=span\{x_1,\ldots,x_n\}=span\{y_1,\ldots,y_n\}$, $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E_n\subset\ldots$.

Сепарабельное пространство — в котором существует счётное всюду плотное множество

Следствие. В сепарабельном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

5. Примеры. Основные: конечномерное пространство, $\ell_2,\ L_2$. Упомяну еще пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих суммируемую с квадратом производную со скалярным произведением $(x,y)=(x,y)_{L_2}+(x',y')_{L_2}$.

Банахово пространство. Критерий евклидовости. Гильбертово пространство — полное сепарабельное евклидово пространство.

6. Ограничимся сепарабельными пространствами. Пример несепарабельного пространства: множество функций на $[0,1]$ отличных от нуля в счетном множестве точек t_i, таких что ряд $\sum x^2(t_i)$ сходится; $(x,y)=\sum x(t_i)y(t_i)$. Очевидно есть континуальная ортогональная система.

7. В гильбертовом пространстве всякая ортогональная система не более чем счетная. В самом деле, берем ортонормированную систему φ_α, окружим каждый элемент шаром радиуса $1/2$, шары не пересекаются (по теореме Пифагора). В каждом есть элемент счетного всюду плотного множества, поэтому число шаров не более чем счетно.

8. Абстрактный ряд Фурье. Пусть есть ортонормированная система e_k в гильбертовом пространстве H. Для каждого элемента $x \in H$ рассмотрим числа $c_k = (x, e_k)$ — коэффициенты Фурье и составим формальный ряд Фурье $\sum c_k e_k$. Возникают вопросы: сходится ли РФ (стремятся ли частичные суммы по норме H), если сходится, совпадает ли сумма с элементом x. Отдельный вопрос: можно написать РФ с какими-то произвольными числами c_k, когда это будет РФ от некоторого элемента.

9. Свойство минимальности. Положим $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$, $H_n = \{y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\} \subset H$

Лемма. У элементов $S_n(f)$ и f одинаковые первые n коэффициентов Фурье. Поэтому для всех $y_n \in H_n$ справедливо равенство $(f - S_n(f), y_n) = 0$.

Свойство минимальности. Пусть есть $f \in H$. Тогда $\|f - S_n(f)\| = \inf_{y_n \in H_n} \|f - y_n\|$. Утверждение следует из леммы и из равенств (теорема Пифагора) $(f - y_n)^2 = (f - S_n(f) + S_n(f) - y_n)^2 =$

$$= (f - S_n(f))^2 + 2(f - S_n(f), S_n(f) - y_n) + (S_n(f) - y_n)^2 = (f - S_n(f))^2 + (S_n(f) - y_n)^2.$$

10. **Неравенство Бесселя.** Очевидно, что $\|S_n f\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2$. Теперь

$$\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - 2(f, S_n(f)) + \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2$$

Это выполнено при всех n, следовательно ряд из квадратов коэффициентов Фурье сходится и верно неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

11. **Замкнутая система**: если $\forall f \in H$ выполнено *равенство Парсеваля*: $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty c_k^2 = \|f\|^2$.

Подчеркнуть, что пока никаких предположений о полноте системы e_n не делалось.

11. **Теорема.** В сепарабельном евклидовом пространстве полная ортонормированная система замкнута и наоборот.

Доказательство в обе стороны.

Пусть система замкнута, тогда $\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2$ стремиться к нулю, поэтому линейные комбинации элементов e_n плотны в H, следовательно, система полна.

Пусть система полна. Тогда любой $f \in H$ можно аппроксимировать с любой точностью линейной комбинацией y_n, Но $S_n(f)$ дает ещё лучшую аппроксимацию по свойству минимальности, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ величина $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2$ меньше ε и выполнено равенство Парсеваля.

12. Полные пространства. Раньше мы, как ни странно, не пользовались полнотой евклидова пространства. Поэтому представленные факты были выполнены, например, для такого уродского пространства: множество всех гладких функций (или непрерывных) со скалярным произведением из L_2 — это пространство не является полным, по норме L_2 последовательность непрерывных-гладких функций может сходиться к разрывной функции.

Теорема Рисса-Фишера. Пусть e_n — ортонормированная система в полном евклидовом пространстве, пусть числа c_k такие, что ряд из их квадратов сходится. Тогда они являются коэффициентами Фурье некоторого $f \in H$ и $\|f\|^2 = \sum c_n^2$.

Доказательство. Положим $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$. Так как $\|f_{n+k} - f_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i^2$ и ряд $\sum c_n^2$ сходится, то f_n — фундаментальная последовательность, значит она сходится к некоторому f. Теперь $(f, e_k) = (f_n, e_k) + (f - f_n, e_k)$, но $|(f - f_n, e_k)| \leqslant \|f - f_n\|$, и $(f_n, e_k) = c_k$ при $n \geqslant k$. поэтому $(f, e_k) = c_k$. Так как $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f - f_n\|^2 \to 0$, то чтд

13. Критерий полноты системы.

Теорема. Для того, чтобы ортонормированная система e_n была полна, необходимо и достаточно, чтобы в H не было ненулевых элементов, ортогональных всем e_n.

Доказательство. Пусть система полна. Тогда она замкнута и справедливо равенство Парсеваля. Если f ортогонален всей системе, то все c_n равны нулю. Отсюда в силу Парсеваля $f = 0$.

Пусть система не полна. Тогда она не замкнута и существует $g \neq 0$: $(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, где $c_k = (g, e_k)$. В силу Рисса-Фишера есть такой элемент f, что $c_k = (f, e_k)$, $(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Элемент $f - g$ не равен нулю и он ортогонален всем e_n. чтд

Теперь в конкретном пространстве L_2 рассмотрим конкретную тригонометрическую систему функций. Она ортонормированная, она полная, поэтому всё, что сказано про абстрактное гильбертово пространство, всё справедливо для этой ситуации. Однако, есть куча вопросов совершенно неабстрактных. Я перечислю кое-что в том направлении.

1. Выпишем тригонометрический ряд. Когда он является РФ от какой-то функции? Когда он является РФ функции из L_2, мы знаем — должен сходиться ряд из квадратов коэффициентов. А что ещё можно сказать? Коэффициенты РФ можно построить и по функции из L_1.

2. Когда РФ сходится в точке t_0? Поточечно? Равномерно?

3. Когда РФ можно дифференцировать-интегрировать?

4. Вот есть элемент пространства L_2, ему соответствует РФ, к какому именно представителю элемента сходится ряд?

5. Приближает ли РФ непрерывной функции эту функцию равномерно?

Оказалось, что многие вопросы в этом направлении — реально сложные и интересные.

Литературные комментарии. Работала толпа людей: дю Буа-Реймонд, Шварц, Фейер, Дирихле, Жордан, Фурье, Абель и Пуассон, Риман, Кантор, Гейне, Лебег, Валле-Пуссен, Остроградский, Лобачевский, Дини, Липшиц, Чебышев, Крылов, Колмогоров.

Среди суммируемых функций есть такие, чей РФ расходится всюду (пример Колмогорова). Проблему Лузина: если ли в L_2 функции, для которых РФ расходится на множестве положительной меры решил Карлесон в 1966 (ответ отрицательный).

Тригонометрические ряды. В пространстве L_2 рассмотрим систему функций
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}.$$
Проверим, что она ортогональная и что нормированная.

Это полная система. С точностью до теоремы Вейерштрасса мы это знаем. Чуть позднее будет явно выписана последовательность тригонометрических многочленов, которая равномерно приближает всякие функции.

Другой подход. Мы сегодня или на следующей лекции покажем, что если только f достаточно гладкая (C^2), то коэффициенты Фурье убывают очень быстро... как n^{-2}. Поэтому соответствующие ряды будут сходиться равномерно. Поэтому они приближают те самые функции. А то, что непрерывными функциями можно приблизить по интегральной норме, тоже очевидно.

1. Формальный ряд.

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx). \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Проинтегрировали, получили. Формулы для коэффициентов. Соответствие суммируемой функции ряда. Переставляли ряд и интегралы, конечно, это не всегда можно. Пока что это просто иллюстрация.

Теоремы типа: если ряд Фурье равномерно сходится к предельной непрерывной функции (например, $|a_n|, |b_n| \leqslant n^{1+\delta}$). Тогда коэффициенты равны.

2. **Лемма Римана.** Если $f \in L_1(a,b)$, то $\lim\limits_{p\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)\sin(px)\,dx = \lim\limits_{p\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)\cos(px)\,dx = 0.$

2.0. Докажем только для синуса. Сначала доказать для непрерывно дифференцируемой функции, это просто, интегрированием по частям, интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана.

2.1. Множество непрерывных функций плотно в L_1. Мы по-разному доказывали, что ограниченные функции плотны в L_1. По теореме Лузина выберем непрерывную функцию, совпадающую на множестве почти полной меры, интеграл по остатку мал.

2.2. Теперь непрерывную функцию приблизим ступенчатой, настоящей ступенчатой, как из первого курса.

2.3. Ну а для каждой фиксированной ступенчатой всё очевидно: снова по частям. чтд.

3. Положим $S_k(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$

Лемма. У функций S_k и f одинаковые первые $2k+1$ коэффициентов Фурье. Поэтому для всех тригонометрических многочленов T_k степени не выше k справедливо равенство $(f - S_k, T_k) = 0$.

4. Минимальное свойство. Пусть $f \in L_2$. Тогда из всех тригонометрических многочленов T_k степени не выше k частичная сумма РФ f находится ближе всех к функции f. То есть $a_n, b_n \to 0$, выполнены неравенство Бесселя и равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)dx \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)dx.$$

Лекция 16 (20 марта 2013)

На предыдущей лекции мы начали ряды Фурье (РФ), рассмотрели абстрактные РФ в абстрактном гильбертовом пространстве, обсудили связь понятий полноты и замкнутости ортонормированных систем, обсудили неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

Далее, мы перешли к самому главному гильбертовому пространству и к самой главной системе в нём — тригонометрической системе. Я рассказал о задачах, связанных именно с тригонометрическими рядами, которые не решаются общей теорией в L_2. Выписал следствия абстрактной теории (неравенство Бесселя и равенство Парсеваля), была доказана важная лемма Римана:

Лемма Римана. Если $f \in L_1(a,b)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} \int_{[a,b]} f(x)\sin(px)\,dx = \lim\limits_{p\to\infty} \int_{[a,b]} f(x)\cos(px)\,dx = 0.$

Я на прошлой лекции писал и доказывал лемму Римана только для синуса, для косинуса то же самое. Сейчас сформулирую обобщение.

Пусть $Q(x)$ — периодическая ограниченная с периодом $2T$ антисимметрическая функция: $Q(x+T) = -Q(x)$, как раз как синус и косинус. Гладкость, абсолютную непрерывность и даже непрерывность (!) не предполагаем.

Обобщенная лемма Римана. Если $f \in L_1(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} \int_{[a,b]} f(x)Q(px)\,dx = 0.$

Пользуемся непрерывностью в среднем функции f:

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

Для непрерывной функции она очевидна, для функции из L_1 достаточно приблизить f непрерывной. Теперь из антисимметричности и абсолютной непрерывности интеграла

$$I = \int_{[a,b]} f(x)Q(px)\,dx = \int_{[a+\frac{T}{p}, b+\frac{T}{p}]} f(x+\frac{T}{p})Q(px+T)\,dx = -\int_{[a,b]} f(x+\frac{T}{p})Q(px)\,dx + o(1).$$

Поэтому

$$2|I| = \left| \int_{[a,b]} f(x)Q(px)\,dx - \int_{[a,b]} f(x+\frac{T}{p})Q(px)\,dx \right| + o(1) \leqslant \sup|Q| \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx + o(1).$$

Всё, доказали. Кстати, справедлива непрерывность в среднем и для $(-\infty,\infty)$.

Скорость сходимости коэффициентов Фурье к нулю.

1. Из Бесселя

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)dx$$

следует что-то вроде $n^{-1/2-\varepsilon}$. **Формально, конечно, это не так:** из того, что сходится ряд $\sum |y_n|$ вовсе не следует, что $|y_n|n \to 0$ или ограничено. Пример: $y_{8^k} = 2^{-k}$, остальные члены ряда равны нулю. Тогда ряд сходится, однако $|y_n| = n^{-1/3}$ для соответствующих n.

2. Гладкость добавляет скорости сходимости: каждая лишняя производная периодической f добавляет n^{-1} к скорости убывания коэффициентов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx$$

3. Если $f \in BV$ кусочно непрерывна, то $n|a_n|, n|b_n| < \infty \Leftrightarrow |a_n|, |b_n| < c\,n^{-1}$. Докажем для a_n:

$$|a_n| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right| = \frac{1}{n\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)d\big(\sin(nx)\big)\right| \leqslant \frac{1}{n\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)d(f(x))\right| \leqslant \frac{1}{n\pi}\bigvee_{-\pi}^{\pi} f.$$

Принцип локализации. Интересуемся, когда $S_k(x) \to f(x)$ (напомнить, что S_k — частичная сумма РФ). Тогда говорим, что ряд Фурье функции f сходится в точке x.

Подставим равенства $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ в формулу

$$S_k(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(n(t-x))\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(\frac{1}{2}(2k+1)(t-x))}{2\sin(\frac{1}{2}(t-x))}dt$$

Пользуемся тут формулой

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(nu) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(2k+1)u)}{2\sin(\frac{1}{2}u)}.$$

по-разному КОММЕНТИРОВАТЬ!
1) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin\Big(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\Big) + \sin\Big(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\Big)$
2) $\sum\cos(nu) = \Re e\sum e^{inu}$ — прогрессия

Меняем местами интеграл с конечной суммой, получаем

$$S_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_k(t)dt, \qquad \text{где} \quad D_k(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{1}{2}(2k+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$ — называется “*ядро Дирихле*”.

Так как при всех k справедливо $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)dx = 1$ (рассказать, почему!), то

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_k(t)dt, \qquad S_k(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]D_k(t)dt.$$

Интеграл справа разбиваем на два интеграла: по $(-\delta, \delta)$ и по $[-\pi, -\delta]\bigcup[\delta, \pi]$. Интеграл по множеству $[-\pi, -\delta]\bigcup[\delta, \pi]$ в силу леммы Римана стремится к нулю. Малость интеграла

$$\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_k(t)dt$$

при $k \to \infty$ определяет сходимость РФ в точке x. Доказан **принцип локализации:** сходимость РФ интегрируемой функции в точке определяется лишь значениями функции в окрестности.

Иначе: если значения двух интегрируемых функций в окрестности некоторой точки совпадают, то их ряды Фурье в этих точках сходятся или расходятся одновременно.

Сказать, что это не очевидный факт: коэффициенты РФ зависят от всех значений функции.

Признаки сходимости рядов Фурье в точке.

Признак Дини. Если при некотором $\delta_0>0$ интеграл

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}dt \tag{1}$$

конечен (**условие Дини**), то в точке x ряд Фурье сходится.

Например, если функция f удовлетворяет условию Липшица, или Гёльдера с некоторым $\alpha>0$, то условие признака Дини выполнено. Если выполнено локально, то сходимость в точке, если при всех x, то поточечно везде. Про равномерную сходимость пообещать сказать позже.

Сказать, что из Дини следует непрерывность функции в точке x.

Доказательство признака Дини: по условию Дини выбираем малое $\delta<\delta_0$, при котором интеграл (1) не превосходит $\varepsilon/2$, по лемме Римана оцениваем интегралы по $[-\pi,-\delta]\bigcup[\delta,\pi]$. чтд

Признак Дини для кусочно разрывных функций. Пусть функция f имеет в точке x разрыв первого рода: определены величины $f(x\pm0)$. Тогда, если конечны оба интеграла

$$\int_{-\delta}^{0}\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{t}dt,\qquad \int_{0}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t}dt.$$

то в точке x ряд Фурье сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

Это верно так как: $\displaystyle\int_{[-\pi,0]}D_k(x)dx=\int_{[0,\pi]}D_k(x)dx=1/2$, и

$$S_k(x)-\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\int_{-\pi}^{0}\big(f(x+t)-f(x-0)\big)D_k(t)dt+\int_{0}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x+0)\big)D_k(t)dt$$

и теперь снова надо использовать лемму Римана.

Например, все это выполнено, если функция f имеет односторонние конечные производные в точке разрыва. Или выполнено одностороннее условия Гёльдера ($|f(x+0)-f(x+t)|,|f(x-0)-f(x-t)|\leqslant Kt^{\alpha}$ $(t>0)$).

Существуют непрерывные функции, РФ которых в некоторых точках расходятся!

Пример в Колмогорове-Фомине в конце п.1, §1, глава 8. Я не буду его точно рассказывать, расскажу **схему**. Во-первых,

$$\int_{[-\pi,\pi]}|D_k(x)|dx\to\infty$$

Для доказательства этого факта возьмем при большом k точки x_n, где знаменатель ядра Дирихле равен 1, возьмем окрестности ширины $2\pi/(3(2n+1))$ вокруг каждой точки и оценим все, что нужно. При этом получается кусок гармонического ряда до $1/k$.

Поэтому нормы линейных функционалов в C с ядрами D_k не ограничены в совокупности.

В силу теорем о слабой сходимости функционалов последовательность этих функционалов не может быть слабо сходящейся. Значит, для некоторой функции f

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_k(t)dt$$

не существует (а это значение S_k в нулевой точке). **Конец схемы.**

Признак Дирихле. Если интегрируемая функция f имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки x_0, то ряд Фурье сходится к $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

Дирихле доказал чуть более слабый факт: если функция f кусочно монотонна и имеет не более конечного числа разрывов первого рода, то ряд Фурье сходится к $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

Признаки Дирихле и Дини не следуют один из другого. **Примеры:** $f(x)=\frac{1}{\ln|x|}$, $f(0)=0$ (это обратная к $e^{-1/|x|}$) удовлетворяет Дирихле, но не удовлетворяет Дини:

$$\int_0^h \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^h \frac{dt}{t\ln t} = \infty$$

Функция $f(x)=x\cos(1/x)$ не имеет ограниченной вариации в окрестности нуля, но для неё верны условия признака Дини.

Доказательство признака Дирихле.

Лемма. Если функция g монотонная и ограниченная на $[0,h]$, $h>0$, то

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,g(+0).$$

Доказательство леммы.

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \int_0^h g(+0)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt + \int_0^h (g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt.$$

Теперь

$$\int_0^h g(+0)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \to g(+0)\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,g(+0).$$

Теперь оцениваем интеграл $\displaystyle\int_0^h (g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt$, покажем, что он стремится к нулю. Сначала $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta:>0\ \forall t\in(0,\delta)$ справедливо $0\leqslant g(t)-g(+0)<\varepsilon$. Теперь

$$\int_0^h (g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^h\right)$$

Интеграл по $[\delta,h]$ стремится к нулю по лемме Римана.

А к интегралу по $[0,\delta]$ применим формулу Бонне (вторую теорему о среднем): если $f\geqslant 0$ и не убывает, то при некотором ξ

$$\int_a^b f(x)q(x)\,dx = f(b)\int_a^{\xi} f(x)q(x)\,dx.$$

Отсюда при некотором $\xi\in(0,\delta)$

$$\int_0^{\delta}(g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = (g(\delta)-g(+0))\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = (g(\delta)-g(+0))\int_{p\xi}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Здесь $g(\delta)-g(+0)\in(0,\varepsilon)$, а множитель $\displaystyle\int_{p\xi}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt$ равномерно ограничен (непрерывная функция $si(p)=\displaystyle\int_0^p\frac{\sin t}{t}\,dt$ на ∞ стремится к конечному пределу). Лемма доказана.

Теперь пишем интеграл для S_n в симметричном виде

$$S_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_k(t)dt=\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_k(t)dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\frac12}{\sin(\frac12 t)}\,\frac{\sin((n+\frac12)t)}{t}\,dt$$

Сумма в квадратных скобках — ограниченной вариации, следующее слагаемое — монотонное, их произведение имеет ограниченную вариацию, то есть является разностью монотонных функций, к каждой применима доказанная лемма и лемма Римана. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\quad\text{чтд}$$

Равномерная сходимость рядов Фурье. Самую простую теорему мы уже формулировали в терминах коэффициентов Фурье. Дадим ещё её аналоги в терминах функции.

Самая простая теорема. Если $f\in C^1$, то ряд Фурье к ней абсолютно сходится.

Я докажу посложнее теорему.

Теорема. Пусть функция f абсолютно непрерывна, а ее производная принадлежит L_2. Тогда РФ f сходится равномерно к f.

Доказательство. Пусть a_n,b_n,A_n,B_n — коэффициенты рядов Фурье функций f и f'. Из неравенства Бесселя следует, что $\sum(A_n^2+B_n^2)<\infty$. Из интегрирования по частям

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin(nx)dx=-\frac{B_n}{n};$$

аналогично, $b_n=\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{A_n}{n}$; (по частям можно, так как $f\in AC$ и справедлива формула Ньютона-Лейбница) следует, что $na_n=-B_n,\ nb_n=A_n$. Поэтому (так как $\frac{c}{n}\leqslant\frac12(c^2+n^{-2})$)

$$\sum(|a_n|+|b_n|)=\sum(\frac{|A_n|}{n}+\frac{|B_n|}{n})\leqslant\frac12\sum(A_n^2+B_n^2)+\sum n^{-2}<\infty,$$

и по признаку Вейерштрасса ряд Фурье абсолютно сходится. Пусть φ — сумма РФ. Она имеет те же коэффициенты Фурье, в силу непрерывности f и φ они совпадают чтд

Справедлив аналог условия Дини равномерной сходимости. Если условие Дини выполняется равномерно, то есть

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}dt<\varepsilon,$$

то РФ сходится к f равномерно. Доказательство не привожу, надо передоказать лемму Римана с равномерностью, пользоваться компактностью в L_1.

Равномерно сходящиеся тригонометрические ряды. Ядра Фейера.

Пофилософствовать про суммирование расходящихся рядов. Что есть специальная теория, что важно для вычислительных методов, что один из методов — по Чезаре — как раз усреднением.

Пишем тригонометрический многочлен

$$\sigma_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} S_n(x) = \frac{1}{k\pi}\sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2n+1)(t-x)\right)}{2\sin(\frac{1}{2}(t-x))}dt =$$
$$= \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\sin(\frac{k}{2}(t-x))}{2\sin(\frac{1}{2}(t-x))}\right)^2 dt = \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{2\sin(\frac{1}{2}t}\right)^2 dt$$

Заметим, что максимум ядра Фейера имеет порядок k^2, но есть множитель $1/k$. Поэтому не всё просто. Ядро Фейера "лучше" ядра Дирихле тем, что оно положительно и перед ним уже стоит множитель, стремящийся к нулю.

Теорема Фейера. $f \in C[-\pi,\pi],\ f(-\pi) = f(\pi)\ \Rightarrow\ \sigma_n \rightrightarrows f$.

Доказательство. Так как при $f \equiv 1$ и $S_k \equiv 1$, и $\sigma_k \equiv 1$, то

$$\frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2 dt = 1$$

при всех k. Поэтому

$$|\sigma_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)|\left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2 dt.$$

Нам нужно сделать $|\sigma_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем по равномерной непрерывности δ такое, что $\sup_{|x-y|\leqslant\delta}\{|f(x)-f(y)|\} \leqslant \varepsilon/2$. Разбиваем интеграл на 2: по $A = \{|t| \le \delta\}$, и второй по оставшемуся множеству B. На множестве A интеграл меньше $\sup_{|x-y|\leqslant\delta}\{|f(x)-f(y)|\} \leqslant \varepsilon/2$ (после вынесения f оставшийся интеграл не превосходит 1). На множестве B знаменатель больше δ, поэтому там интеграл имеет порядок $\sup|f|(\pi\delta^2 k)^{-1}$ и при больших k тоже не превосходит $\varepsilon/2$. чтд

Теперь теоремы Вейерштрасса о том, что множества многочленов и тригонометрических многочленов плотны в пространстве C доказаны.

Напоминаю. *Там были теоремы о том, что множества всех многочленов и всех тригонометрических многочленов плотны в $C(0,1)$ (каждое). Я это декларировал в качестве следствия из так и недоказанной теоремы Бернштейна (на мой вкус, более громоздкой).*

Теперь мы доказали, что в пространстве C_0 периодических непрерывных функций тригонометрические многочлены плотны. В качестве аппроксимаций тригонометрическими функциями берем суммы Фейера, для аппроксимаций многочленами сначала делаем функцию периодической с помощью линейной добавки, потом приближаем тригонометрическим многочленом. Потом конкретный тригонометрический многочлен приближаем куском степенного ряда.

Отсюда следует заодно и **полнота тригонометрической системы** в L_2. Теперь мы знаем, что каждую периодическую непрерывную функцию можно равномерно приблизить линейной комбинацией тригонометрических многочленов. Следовательно, можно в L_2 приблизить линейной комбинацией тригонометрических многочленов с рациональными коэффициентами, это счетное множество. А то, что каждую интегрируемую можно приблизить в L_2 непрерывной мы уже знаем, я об этом говорил много раз, можно через ступенчатые, можно через теорему Лузина.

Подчеркиваю! Суммы Фейера — это не ряды Фурье. Ряды Фурье оптимально приближают функции в L_2 по норме L_2. Суммы Фейера отлично работают в C.

Теорема Фейера в L_1. Если $f \in L_1$, то суммы Фейера сходятся к f по норме L_1.

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_k(x) - f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)| \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{2\sin(\frac{1}{2}t))} \right)^2 dt \right) =$$
$$= \frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)|\, dx \right) \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{2\sin(\frac{1}{2}t))} \right)^2 dt$$

Осталось доказать, что при малых $|t|$ мала величина

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)|\, dx.$$

Это как раз то, что называют непрерывностью в среднем и что я использовал при доказательстве обобщенной леммы Римана.

Дополнительное замечание 1. Всякая суммируемая функция определяется своими коэффициентами Фурье.

То есть, берем коэффициенты Фурье суммируемой функции, по ним однозначно восстанавливается функция: если f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то все коэффициенты Фурье $f - g$ равны нулю. По построению сумм Фейера $f - g$ они тоже все равны нулю, значит предел в L_1 равный нулю, то есть $f \overset{a.e.}{=} g$.

Дополнительное замечание 2. Пусть функция f в точке x имеет конечные правые и левые конечные пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$. Тогда $\sigma_n \to \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$. Доказательство то же.

Ряды Фурье на $[-\ell, \ell]$. Не буду доказывать теоремы про это. Только формулы напишу. Ортонормированная система и ряд Фурье имеют вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos(\frac{\pi n t}{\ell}),\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin(\frac{\pi n t}{\ell}); \qquad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n t}{\ell}) + b_n \sin(\frac{\pi n t}{\ell}).$$

Коэффициенты Фурье $a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(\frac{\ell n x}{\pi})dx, \qquad b_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin(\frac{\ell n x}{\pi})dx.$

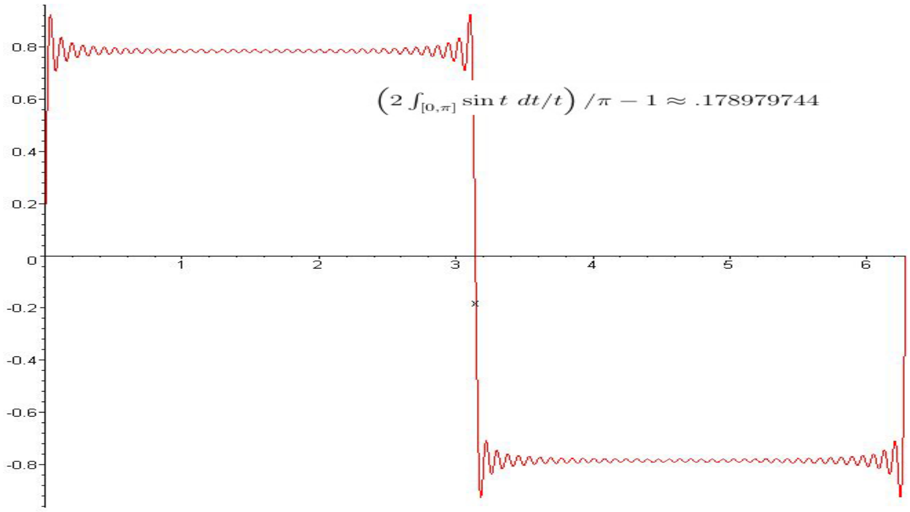
Ряд Фурье непериодической функции — особенность по краям. Сказать, что об этом надо помнить, но что это в точности соответствует любому другому скачку.

Разложение отдельно по синусам и по косинусам. Если функция четная, то она раскладывается по косинусам, если нечетная — по синусам.

Особая конструкция — если функция задана на $[0, \pi]$, то её можно разложить в РФ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и по синусам, и по косинусам: надо только по-разному продлить.

Другие виды записи ряда Фурье. Например, можно считать, что $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(nt + \varphi_n)$, это что-то вроде РФ в полярных координатах. В каждом двумерном подпространстве в L^2 с базисом из $\cos(nt), \sin(nt)$ можно функции писать в виде $\cos(nt + \varphi)$.

Эффект Гибса. Словесно рассказать, что это такое, нарисовать картинку.



Лекция 17 (апрель 2013)

На прошлой лекции, в прошлом модуле, мы рассмотрели вопросы сходимости РФ. Сначала доказали принцип локализации и дали два признака сходимости РФ в некоторой фиксированной точке — Дини и Дирихле.

Далее изучалась сходимость тригонометрических рядов к непрерывной периодической функции. Доказали равномерную сходимость сумм Фейера, это позволило, наконец, с одной стороны, честно доказать теорему Вейерштрасса, а с другой — доказать полноту тригонометрической системы: при доказательстве сходимости тригонометрических многочленов Фейера не использовалось ничего, как и при доказательстве теоремы Берштейна.

Кроме того, я рассказал несколько разных конструкций, например, что такое эффект Гибса.

На этой лекции мы завершим ряды Фурье и перейдем к интегралам Фурье.

Начну я с вопроса: а всякий ли тригонометрический ряд является РФ от некоторой интегрируемой функции? Вдумайтесь, вот есть ряд. Коэффициенты стремятся к нулю. Если квадраты коэффициентов суммируемые — по абстрактной теореме Рисса–Фишера это РФ функции из L_2. Ещё какие-то ряды являются рядами Фурье функций из $L_1 \setminus L_2$. А что останется?

Заметим, что если функция не принадлежит L_1, то что такое ряд Фурье для неё — отдельный вопрос: коэффициенты Фурье не определены.

Сходящиеся тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье никакой интегрируемой функции. Здесь есть специальная теория для РФ с положительными убывающими коэффициентами (Юнг). Рассмотрим ряды

$$(S) \qquad \sum q_n \sin(nt), \qquad\qquad (C) \qquad \sum q_n \cos(nt).$$

Пусть $0 \leqslant \ldots \leqslant q_{n+1} \leqslant q_n \ldots \leqslant \ldots q_1$. Важную упрощающую роль играет условие $\sum q_n/n < \infty$.[3] В силу этого условия и признака Дирихле ряды (S) и (C) сходятся равномерно на любом замкнутом промежутке, не содержащем точки $2k\pi$. Вопрос о принадлежности суммы к L_1 заключается в изучении поведения суммы ряда в окрестности 0.

Теорема. Если $\sum q_n/n < \infty$, то оба ряда (C), (S) сходятся к интегрируемым функциям. Если ряд (S) сходится к интегрируемой функции, то $\sum q_n/n < \infty$.

Для доказательства первой части теоремы следует всё аккуратно расписать и оценить.

Для доказательства второй части надо взять ряд (S) и его проинтегрировать от 0 до t:

$$\int_0^t f(x)\,dx = \sum_1^\infty \frac{q_n}{n}(1-\cos(nt)) = \sum_1^\infty \frac{q_n}{n} - \sum_1^\infty \frac{q_n}{n}\cos(nt).$$

Теперь слева получается конечная величина, справа разность $\sum q_n/n$ и сходящегося ряда. чтд

Из этого всего следует, что тригонометрический ряд $\sum^\infty \sin(nx)/\ln n$ не является РФ никакой интегрируемой функции.

[3]Признак Дирихле условной сходимости ряда. Ряд $\sum a_n b_n$, $a_n \searrow 0$, $|\sum_1^k b_n| < K < \infty \Rightarrow$ ряд сходится.

Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Когда можно дифференцировать РФ? Брать первообразную? Если была функция, и мы взяли её производную или первообразную, то что будет с их РФ? Со сходимостью?

Основное соображение простое: при интегрировании повышается гладкость и "улучшается" сходимость РФ, при дифференцировании сходимость РФ "ухудшается". Одно дифференцирование — коэффициенты РФ умножаются на n, одно интегрирование — делятся на n.

Одна теорема была — если $f \in AC$ и $f' \in L_2$, то РФ функции f сходится равномерно. При её доказательстве была установлена связь коэффициентов РФ функции и её производной. С помощью на интегрировании по частям было показано: если a_n, b_n, A_n, B_n — коэффициенты рядов Фурье функций f и f', то $na_n = -B_n,\ nb_n = A_n$.

Обычно все теоремы о дифференцировании и интегрировании основаны на простых формулах для соответствующих коэффициентов Фурье, получающихся при формальном почленном интегрировании или дифференцировании. Логика простая: если у функции есть достаточно количество производных, то её коэффициенты сходятся к нулю достаточно быстро, чтобы можно было почленно дифференцировать.

Интегрировать можно всегда, при интегрировании важно простое соображение: коэффициент a_0 должен быть равен 0, чтобы первообразная осталась периодической, из первообразных надо брать ту, с нулевой константой, если мы хотим зачем-то потом интегрировать ещё раз.

Пример теоремы. Пусть f непрерывна, тогда первообразная получается почленным интегрированием и полученный ряд сходится равномерно.

Теоремы о интегрировании РФ на произвольном промежутке $[a, b]$ не рассматриваются, нет специальных утверждений, обычный функциональный ряд.

Скорость сходимости рядов Фурье.

Основное соображение: <u>чем глаже функция, тем быстрее сходится к ней РФ</u>. Например, если коэффициенты убывают, как n^{-3}, то РФ, очевидно, сходится равномерно и $\|S_n(x) - f(x)\|_C$ можно оценить как $C_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3} \leqslant C_2 n^{-2}$. Можно получить и оценки в терминах функции

Например, если $f \in C$ и кусочно $f \in C^1$, то $\|S_n(x) - f(x)\|_C \leqslant K\ \ln n\, n^{-1}$.

Для доказательства надо выписать разность $S_n(x) - f(x)$ через ядро Дирихле, потом разбить промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ на $[-n^{-1}, n^{-1}]$ и остальное и аккуратно провести все оценки, на маленьком промежутке оценить через его длину и максимум производной, на большом проинтегрировать по частям.

Соответственно, можно выписывать оценки в C^m. Если функция 2 раза непрерывно дифференцируема, то $\|S_n(x) - f(x)\|_{C^1} \leqslant K\ \ln n\, n^{-2}$ Условие Гёльдера тоже можно использовать. Если f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, то $\|S_n(x) - f(x)\|_C \leqslant K\ \ln n\, n^{-\alpha}$.

Ещё факты без доказательства, привожу с целью создать правильное впечатление о местной проблематике. Доказательства можно самим придумывать, можно найти, утверждения весьма естественные.

Лемма Кантора. Если тригонометрический ряд сходится на некотором промежутке, то коэффициенты ряда стремятся к нулю.

Теорема Гейне-Кантора. Если тригонометрический ряд сходится к нулю на $[-\pi,\pi]$, то все его коэффициенты нулевые.

Теорема дю Буа-Раймона. Если f ограничена, интегрируема и разлагается поточечно в тригонометрический ряд, то ряд этот является её рядом Фурье.

Доказательства есть в Фихтенгольце (том 3), слишком громоздкие-сложные :)

Интеграл Фурье и преобразование Фурье.

При изучении РФ мы предполагали, что функция периодическая, в основном на промежутке $(-\pi,\pi)$. Теперь предположим, что функция определена на $\mathbb{R}$ и интегрируема (если мы хотим говорить об интеграле Римана, то абсолютно интегрируема, для интеграла Лебега это одно и то же). Оказывается, что при этом можно написать похожую формулу, заменив целочисленную положительную переменную n на положительную вещественную y, и сумму на интеграл:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \quad \text{заменить на} \quad \int_0^{\infty}\Big(a(y)\cos(xy)+b(y)\sin(xy)\Big)\,dy.$$

При этом

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)\,dx, \qquad b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ty)\,dx.$$

Оба этих интеграла сходятся по мажорантному признаку. Более того, так как по y подинтегральное выражение непрерывно — это просто синус-косинус — и всё мажорируется интегрируемой функцией $|f|$, то функции a и b непрерывные (легко проверить “в лоб”). Если подставить формулы для $a(y)$ и $b(y)$ в формулу (её называют интегралом Фурье), то получится выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

РФ представляет исходную функцию, и интеграл Фурье тоже: опять при выполнении дополнительный условий верна (при каком-то x или всюду) *формула Фурье* (ФФ):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Теорема. Если функция f удовлетворяет условию Дини в точке x, то справедлива ФФ.

Для справедливости условия Дини

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt$$

необходима непрерывность f в точке x. Если f разрывна в x, но существуют односторонние пределы и справедливы односторонние условия Дини (такие же, как и для рядов Фурье), то

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Видимо, при естественных условиях можно доказать теоремы о равномерной сходимости ИФ на различных промежутках. Нужно предположить, что условие Дини справедливо в равномерной форме (как и при рядах Фурье) на соответствующем промежутке.

Доказательство теоремы. Рассмотрим аналог “частичной суммы” ряда:

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^A dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Для доказательства теоремы надо показать, что $J(A)\to f(x)$ при $A\to\infty$.

Так как внутренний интеграл сходится равномерно при всех y, то можно поменять интегралы местами. Получаем (на последнем шаге делаем замену $z=t-x$)

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_0^A \cos\big(y(t-x)\big)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin\big(A(t-x)\big)}{t-x}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\,\frac{\sin(Az)}{z}\,dz.$$

Воспользуемся равенством (которое верно при $A>0$):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(Az)}{z}\,dz = 1. \qquad \text{Теперь} \qquad J(A)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\,\sin(Az)\,dz.$$

Правую часть разобьем на 5 частей (величины $\delta>0$ и $N>0$ выберем позднее):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots = \int_{-\infty}^{N}\ldots + \int_{-N}^{-\delta}\ldots + \int_{-\delta}^{\delta}\ldots + \int_{\delta}^{N}\ldots + \int_{N}^{\infty}\ldots.$$

Части 1 и 5 — это хвосты сходящегося интеграла, выбором N их можно сделать по модулю меньше ε, после чего N зафиксируем. Часть 3 можно сделать сколь угодно малой выбором $\delta>0$ в силу условия Дини, сделаем её меньше ε и зафиксируем δ. А теперь можно куски 2 и 4 (при фиксированных N и δ) сделать сколь угодно малыми в силу леммы Римана при $A\to\infty$. чтд.

Из доказательства видно, что для равномерной сходимости нужно равномерное условие Дини и нужно передоказывать лемму Римана

Комплексная форма записи равенства Фурье.

Пусть $f\in L_1(\mathbb{R})$, перепишем формулу Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt$$

Рассмотрим величину:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Вроде бы можно сказать, что функция по y нечетная, значит эта величина равна нулю, однако есть проблемы. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt$$

сходится равномерно, является непрерывной функцией переменной y. Поэтому для любого N определен и равен нулю в силу нечетности интеграл Римана

$$\int_{-N}^{N} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\big(y(t-x)\big)\, dt = 0.$$

Поэтому всегда

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\big(y(t-x)\big)\, dt = 0,$$

а без главного значения этот интеграл может расходиться. Теперь мы получили

$$f(x) = V.p.\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-y(t-x)i}\, dt.$$

Главное значение в этой формуле часто опускают, формально оно необходимо.

Интеграл Фурье в литературе. Во многих учебниках излагают ИФ (и РФ) без интеграла Лебега. Поэтому в теоремах о сходимости вместо условия интегрируемости f на $\mathbb{R}$ пишут что-то вроде "f кусочно-непрерывна на каждом конечном интервале и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$".

Преобразование Фурье. Положим

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt, \qquad \text{тогда} \qquad f(x) = V.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixy}\, dt.$$

Определение. Говорят, что $\hat{f}$ — это преобразование Фурье функции f.

Соответственно, следующая формула $f = V.p.\ ...(\hat{f})$ — это обратное преобразование.

Пишут не всегда так, как я написал. Иногда пишут прямое преобразование с коэффициентом 1, а обратное — с коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$. Иногда и в преобразовании Фурье ставят главное значение.

Замечание 1. Обсудить, какой интеграл брать в формулах — Лебега или Римана? Мы будем предполагать, что $f \in L_1(\mathbb{R})$ (внутренний интеграл — Лебега!), поэтому подынтегральная функция во внешнем интеграле непрерывна. Отсюда следует, что внешний интеграл надо брать Римана, для него определено главное значение.

Замечание 2. Для каждой периодической $f \in L_1$ можно посчитать коэффициенты РФ. Для сходимости РФ нужны дополнительные условия. Так и тут: для $f \in L_1(\mathbb{R})$ определено его преобразование Фурье. При дополнительных условиях (Дини) справедлива формула обращения, аналогичная сходимости РФ.

Замечание 3. Если $\hat{f} \equiv 0$, то и $f \overset{a.e.}{=} 0$. Это не очень удивительно, иначе какая-то функция переходит в 0, обратное преобразование Фурье в 0, и всяко формула Фурье не работает. Но это справедливо при всех $f \in L_1$, не только для тех, для которых справедлива ФФ. Покажем это.

2.1. $\hat{f} \equiv 0 \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}$ справедливо $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) e^{-iyt}\, dt$

2.2. Зафиксируем $\xi \in \mathbb{R}$ и положим $g(x) = \displaystyle\int_0^{\xi} f(x+t)dt.$

2.3. Ясно, что $\|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \leqslant \xi \,\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$ и $g(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

2.4. В силу теоремы Фуббини и пункта 2.1. $\forall y \in \mathbb{R}\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iyx}\,dx$.

2.5. Функция $g \in AC$ на любом конечном промежутке, g' существует почти всюду. Следовательно, почти всюду справедливо условие Дини, следовательно для g справедлива почти всюду формула Фурье, g непрерывна, $\hat{g} = 0$, значит $g \equiv 0$.

2.6. Теперь $\forall \xi \in \mathbb{R}$ справедливо $\displaystyle\int_0^{\xi} f(t)dt = 0$, значит $f \overset{a.e.}{=} 0$.

Свойства преобразования Фурье. Фурье-образ функции f обозначаем либо $\hat{f}$, либо $F[f]$.

1. Если $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ и $\|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0$, то $\hat{f}_n \rightrightarrows \hat{f}$. Сходимость Фурье образов равномерна на всей прямой. Свойство следует из всяческой полноты и очевидной оценки

$$|\hat{f}_n(y) - \hat{f}_m(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$$

2. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и f ограничена на $\mathbb{R}$, то $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(y) \to 0$ на бесконечности. В частности, $\hat{f}$ — ограниченная функция.

Ограниченность $\hat{f}$ очевидна: $|\hat{f}(y)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Если $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, то $\hat{f} = \displaystyle\int_a^b e^{-ixy}\,dx = y^{-1}(e^{iyb} - e^{iya})$, это непрерывная функция, стремится к 0 на бесконечности. Следовательно, преобразование Фурье любой линейной комбинации характеристических функций отрезков такое же. Такие ступенчатые функции плотны в $L_1(\mathbb{R})$, поэтому для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ найдется последовательность линейных комбинаций $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$.

Теперь свойство 2 следует из свойства 1.

3. Если $f \in AC$ на каждом конечном интервале и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то $F[f'] = iy\hat{f}$. Каждая $f \in AC$ имеет вид $f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. В силу $f' \in L_1(\mathbb{R})$ существуют пределы f на бесконечности (по определению интегрируемости!). В силу $f \in L_1(\mathbb{R})$ эти пределы равны нулю. Теперь

$$F[f'](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx = iy\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = iy\hat{f}(y)$$

Аналогично, если $f \in AC$ на каждом конечном интервале и $f, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $F[f^{(k)}] = (iy)^k\hat{f}$. То есть, (свойство 2) при такой гладкости функция $\hat{f}(y)$ убывает на бесконечности быстрее $|y|^{-k}$.

4. Если $\exists\ f'' \in L_1(\mathbb{R})$ и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Это следует из предыдущего пункта: $\hat{f}(y)$ убывает на бесконечности быстрее $|y|^{-2}$, следовательно, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

5. Двойственное утверждение: пусть $f(x), xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\exists \frac{d}{dt}\hat{f} = F[-ixf(x)]$.

Доказывается в лоб, простым дифференцированием интеграла.

Аналогично, если $f(x), xf(x), \ldots, x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то $\exists \frac{d^k}{dt^k}\hat{f} = F[(-ix)^k f(x)],\ k = 0, \ldots, p$.

Описаны производные от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производных.

Философия 1. *В рядах Фурье гладкость функции определяла скорость сходимости коэффициентов к нулю и наоборот. Точно так же и здесь: гладкость функции связана со скоростью убывания Фурье-образа к нулю на бесконечности.*

Философия 2. *Используя эти свойства преобразования Фурье можно показать (с помощью хитрых конструкций функционального анализа, в частности, теоремы Хана-Банаха, и ТФКП) можно показать, что если f почти всюду на (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ отлична от нуля и если $|f(x)| \leqslant Ce^{-\delta|x|}$, то система функций $x^n f(x)$ полна в $L_2(a,b)$. В частности, полны системы функций Эрмита на $\mathbb{R}$ и Лагерра на $\mathbb{R}^+$.*

Естественный вопрос: *какие классы функций преобразуются преобразованием Фурье в себя?*

Рассмотрим множество S_∞ бесконечно дифференцируемых функций f, таких что,

$$\forall n,k \in \mathbb{N}^+ \ \exists C_{n,k} = C_{n,k}(f,n,k) \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ справедливо } \ |x^n f^{(k)}(x)| \leqslant C_{n,k}.$$

Всё равно, считать ли целым n или вещественным.

Утверждение. ПФ преобразует S_∞ на всё S_∞.

Для доказательства импликации $f \in S_\infty \Rightarrow F[f] \in S_\infty$ надо сослаться на отмеченные свойства преобразования Фурье. Доказательство того, что преобразование Фурье сюръективно, пройдёт заменой знака в показателе степени в силу Формулы Фурье.

Аналитическое продолжение. Пусть $f \in S_\infty$ и пусть при некоторых $K, \sigma > 0$ справедливо $|f(x)$ K. Тогда (проверить можно непосредственным счётом) $F[f]$ аналитична в открытой полосе ширины 2σ вокруг вещественной оси.

Свертка функций. Пусть $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi$$

называется свёрткой функций f_1 и f_2, обозначается $f = f_1 * f_2$. Свёртка интегрируемых функций интегрируема (по теореме Фуббини, так как существует интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |f_1(\xi) f_2(\eta)|\, d\xi d\eta$).

Часто пишут свёртку без множителя. Множитель нужен для того, чтобы следующее равенство было без множителя. Свёртка коммутативна, свёртка ассоциативна.

Если посчитать всё аккуратно, то получится $F[f_1 * f_2] = F[f_1]\, F[f_2]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \right] e^{-iyx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)\, e^{-iyx} dx \right] d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)\, e^{-iy\eta}\, e^{-iy\xi} d\eta \right] d\xi = F[f_1](y)\, F[f_2](y).$$

Преобразование Фурье в пространстве $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$.

При изучении периодических функций и РФ у нас была сравнительно простая L_2 теория. На $\mathbb{R}$ тоже есть своя Фурье L_2 теория — интегралы Фурье. Есть принципиальная проблема-трудность: на ограниченном промежутке $L_2 \subset L_1$, а на $\mathbb{R}$ это не так. И поэтому преобразование Фурье на $L_2(\mathbb{R})$ мы не определили.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Определим при каждом $N > 0$ функцию

$$g_N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Теорема Планшереля (1910). а) $g_N \in L_2(\mathbb{R})$; б) g_N сходится по норме L_2 при $N \to \infty$ к некоторой $g \in L_2(\mathbb{R})$; в) справедливо равенство $\|g\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$; г) если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $g = \hat{f}$.

Равенство Планшереля — изометричность (унитарность) преобразования Фурье в L_2. Это естественный аналог равенства Парсеваля в теории РФ.

Основная идея доказательства: сначала утверждение теоремы доказывается для функций из S_∞, они плотны в $L_2(\mathbb{R})$, далее распространяем всё по непрерывности.

В базисе из функций Эрмита преобразование Фурье имеет диагональный вид с числами ± 1 и $\pm i$ на диагонали. 4-я степень преобразования Фурье — единичный оператор.

Литература.

1. Никольский С.М. Курс математического анализа, том II. М.: Наука, 1983, 448 стр.

2. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу, Москва, 2010, 559 стр. (Лекции студентам физтеха, есть в сети)

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, 1976, 543 стр.

4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, М., Мир, 1979.

5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III, Наука, 1966, 656 стр.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, том 2 из 3. Наука, 1981, 584 стр.