

Группы и алгебры Ли
Листок 8
Связность и односвязность

1. Докажите, что для любой связной группы Ли G фундаментальная группа $\pi_1(G)$ абелева.

Указание: рассмотрите ядро отображения $\tilde{G} \rightarrow G$, где \tilde{G} – универсальная накрывающая.

2. Докажите, что группы $U(n)$ и $SU(n)$ связны.

3. Докажите, что группы $SL_n(\mathbb{C})$ и $Sp_n(\mathbb{C})$ связны и односвязны.

4. Найдите число компонент связности группы $SO(k, l)$.

5. Докажите, что $\pi_1(SO_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 3$.

6. Докажите, что $\pi_1(SL_n(\mathbb{R})) = \pi_1(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 3$.

7. Постройте накрывающий гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$.

Указание: рассмотрите билинейную форму на $\mathfrak{su}(2)$, определённую по формуле $(a, b) = \frac{1}{2}\text{tr}(a\bar{b}^t)$. Покажите, что эта форма симметрична, положительно определена и инвариантна относительно присоединённого действия $SU(2)$.