А.В. Колесников

Вариационное исчисление

Высшая Школа Экономики. Математический факультет.

Москва. 2012-2013 гг.

Геометрические и функциональные неравенства

Геометрические неравенства выражают количественные соотношения между геометрическими объектами. Функциональные неравенства выражают соотношения между интегралами от функций. Часто геометрические неравенства имеют эквивалентную функциональную форму и наоборот.

В качестве примера мы рассмотрим изопериметрическое неравенство в $\mathbb{R}^d$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ – множество в $\mathbb{R}^d$, $\lambda(A)$ — его d-мерный объем (**мера Лебега**), $\mathcal{H}^{d-1}(\partial A)$ — $(d-1)$-мерный объем его границы ∂A ($(d-1)$-мерная **мера Хаусдорфа** ∂A).

Теорема 1. (Изопериметрическое неравенство.)

$$\lambda^{\frac{d-1}{d}}(A) \leq \frac{1}{\kappa(d)}\mathcal{H}^{d-1}(\partial A),$$

где $\kappa(d) = d \cdot \lambda^{\frac{1}{d}}(B_1)$, $\quad B_1 = \{x : |x| \leq 1\}$. *При этом точное равенство достигается тогда и только тогда, когда* A *— шар.*

Это неравенство имеет функциональную форму.

Теорема 2. *(***Неравенство Соболева***) Для любой интегрируемой гладкой функции* f

$$\left[\int_{\mathbb{R}^d} |f|^{\frac{d}{d-1}}\ dx\right]^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{1}{\kappa(d)} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|\ dx.$$

Для того, чтобы из неравенства Соболева получить изопериметическое неравенство, достаточно положить $f = I_A$. Получить неравенство Соболева из изопериметрического также возможно, но это несколько сложнее.

В настоящей лекции мы обсудим несколько неравенств такого типа.

Неравенство Пуанкаре

Неравенством Пуанкаре называется "L^2-версия" изопериметрического неравенства. Докажем, что существует такая константа $C > 0$, что для любой непрерывно дифференцируемой функции x на отрезке $[0, 1]$ выполнено неравенство

$$\int_0^1 \left(x - \int_0^1 x dt\right)^2\ dt \leq C \int_0^1 (\dot{x})^2\ dt.$$

Задача 1. *Доказите, что наименьшее возможное значение* C *равно* $\frac{1}{\pi^2}$. *Для этого перейдите к функциям* $\tilde{x} = x - \int_0^1 x dt$ *и* $\widehat{x} = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\int_0^1 \tilde{x}^2 dt}}$ *и рассмотрите экстремальную задачу изопериметрического типа*

$$\int_0^1 \dot{\widehat{x}}^2\ dt \to \inf, \quad \int_0^1 \widehat{x}\ dt = 0,\ \int_0^1 \widehat{x}^2\ dt = 1.$$

Убедимся, что для любой непрерывно дифференцируемой функции f действительно выполнено неравенство

$$\int_0^1 \Big(x - \int_0^1 x dt\Big)^2\ dt \le \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (\dot{x})^2\ dt. \tag{1}$$

Задача 2. *Убедитесь, что это неравенство эквивалентно следующему неравенству:*

$$\int_0^L \Big(x - \frac{1}{L}\int_0^L x dt\Big)^2\ dt \le \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L (\dot{x})^2\ dt, \tag{2}$$

для любой непрерывно дифференнцируемой функции f *на отрезке* $[0, L], L > 0$.

Доказательство (2) разбивается на следующие шаги.

1) Продолжим функцию x до четной функции $\tilde{x}$ на отрезок $[-1,1]$. Так как

$$\int_0^1 \Big(x - \int_0^1 x dt\Big)^2 \ dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \Big(\tilde{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \tilde{x} dt\Big)^2 \ dt,$$

$$\int_0^1 (\dot{x})^2 \ dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (\dot{\tilde{x}})^2 \ dt,$$

то достаточно доказать неравенство

$$\int_{-1}^1 \Big(\tilde{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \tilde{x} dt\Big)^2 \ dt \le \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^1 (\dot{\tilde{x}})^2 \ dt \qquad (3)$$

для функций со свойством $x(-1) = x(1)$.

2) Сделаем замену $s = \pi t$. Неравенство (3) окажется эквивалентно неравенству

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x ds\Big)^2 \ ds \le \int_{-\pi}^{\pi} (\dot{x})^2 \ ds \qquad (4)$$

2π-**периодических** функций.

3) Чтобы доказать (4), разложим непрерывно дифференцируемую 2π-**периодическую** функцию x и ее производную $\dot{x}$ в ряд Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \ dt + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos(kt),$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k \cos(kt) - \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k \sin(kt).$$

Отсюда получаем (в силу тождества Парсеваля)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)\ ds \Big)^2\ dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\dot{x}(t))^2\ dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)\ ds \Big)^2\ dt \le \int_{-\pi}^{\pi} (\dot{x}(t))^2\ dt.$$

Неравенство Пуанкаре для отрезка доказано.

В заключение докажем **неравенство Пуанкаре на кубе** $I = [0,1]^d$. Для простоты рассмотрим случай $d = 2$.

$$\begin{aligned} &\int_I \Big(f(x,y) - \int_I f(x,y) dxdy \Big)^2\ dxdy \\ &\qquad = \int_I \Big(f(x,y) - \int_0^1 f(x,y)\ dy + \int_0^1 f(x,y)\ dy - \int_I f(x,y) dxdy \Big)^2\ dxdy. \end{aligned}$$

Обозначим

$$f(x,y)-\int_0^1 f(x,y)\ dy = g_0(x,y), \quad \int_0^1 f(x,y)\ dy - \int_I f(x,y)dxdy = g_1(x).$$

Имеем:

$$\int_I\Big(f(x,y)-\int_I f(x,y)dxdy\Big)^2\,dxdy = \int_I g_0^2\ dxdy+2\int_I g_0(x,y)g_1(x)\ dxdy+\int_I g_1^2\ dxdy.$$

В силу того, что $\int_0^1 g_0(x,y)\ dy = 0$, получаем

$$\int_I g_0(x,y)g_1(x)\ dxdy = \int_0^1 g_1(x)\Big(\int_0^1 g_0(x,y)\ dy\Big)\ dx = 0.$$

Используя равенства $\int_0^1 g_0(x,y)\ dy = 0$, $\int_0^1 g_1(x,y)\ dx = 0$, применим теперь одномерные неравенства Пуанкаре

$$\begin{aligned}\int_I g_1^2\ dxdy &= \int_0^1\int_0^1 g_1^2\ dxdy \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 (\partial_x g_1)^2\ dxdy \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\int_0^1 f_x(x,y)dy\Big)^2\ dxdy \le \frac{1}{\pi^2}\int_I f_x^2(x,y)\ dxdy.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_I g_1^2\ dxdy \le \frac{1}{\pi^2}\int_I f_y^2(x,y)\ dxdy.$$

В итоге получаем **неравенство Пуанкаре на кубе** $[0,1]^2$

$$\int_I\Big(f(x,y)-\int_I f(x,y)dxdy\Big)^2\ dxdy \le \frac{1}{\pi^2}\int_I |\nabla f(x,y)|^2\ dxdy.$$

Аналогичное неравенство выполнено на кубе любой размерности.

Теорема 3. *Для d-мерного единичного куба $I = [0,1]^d$, меры Лебега dx и непрерывно дифференцируемой функции $f : I \to \mathbb{R}$ выполнено неравенство Пуанкаре*

$$\int_I \Big(f - \int_I f \;dx\Big)^2 \;dx \le \frac{1}{\pi^2} \int_I \sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)^2 \;dx$$

Принцип неопределенности

Принцип неопределенности квантовой механики утверждает, что произведение некоторых двух физических величин (например, координаты и импульса) не может быть меньше некоторой постоянной. Это утверждение имеет различные математические трактовки. Так как физические величины связаны преобразованием Фурье, то одна из математических формулировок этого принципа выглядит так

$$\int_{\mathbb{R}} t^2|x|^2dt \cdot \int_{\mathbb{R}} t^2|\widehat{x}^2|dt \geq \frac{1}{16\pi^2}\Big(\int |x|^2 \ dt\Big)^2.$$

Здесь x — произвольная (комплекснозначная) функция из $L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{x}$ — ее преобразование Фурье.

В силу известной связи между производными функции и ее преобразованием Фурье, неравенство можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} t^2|x|^2dt \cdot \int_{\mathbb{R}} |\dot{x}|^2dt \geq C\Big(\int |x|^2 \ dt\Big)^2.$$

Мы докажем следующий вариант принципа неопределенности.

Теорема 4. *Пусть $x(t), tx(t)$ непрерывно дифференцируемы и принадлежат $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда*

$$\int_0^{+\infty} x^2\ dt \leq 2\Big(\int_0^{+\infty} t^2x^2\ dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^{+\infty} \dot{x}^2\ dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Точное равенство достигается на функциях вида $x(t) = Be^{-At^2}, A > 0$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^{+\infty} \dot{x}^2\ dt \to \inf, \quad \int_0^{+\infty} (t^2-1)x^2\ dt = 1.$$

Стандартным образом получаем

$$L = \lambda_0\dot{x}^2 + \lambda_1(t^2-1)x^2,$$

уравнение Эйлера

$$-\lambda_0\ddot{x} + \lambda_1(t^2-1)x = 0,$$

условие трансверсальности $\dot{x}(0) = 0$ (мы пользуемся не обоснованным в лекциях принципом Лагранжа для бесконечного отрезка).

Решая уравнение Эйлера, получаем экстремаль $x = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Чтобы убедиться в том, что это действительно решение, заметим (это формула

Вейерштрасса!) что

$$\int_0^{+\infty} \left(\dot{x}^2 - (1-t^2)x^2\right)\, dt = \int_0^{+\infty} (\dot{x} + tx)^2\, dt \geq 0.$$

Равенство доказывается путем интегрирования по частям, с использованием того, что $\dot{x}, tx \in L^2(\mathbb{R}_+)$ (формула интегрирования по частям для интегрируемых функций на бесконечном интервале требует обоснований, но мы их опустим). Ноль в правой части достигается на экстремали. Подставив в неравенство

$$\int_0^{+\infty} \dot{x}^2\, dt \geq \int_0^{+\infty} (1-t^2)x^2\, dt$$

функцию $x(t) = y(t/a)$ получим

$$\int_0^{+\infty} \dot{y}^2\, dt - a^2 \int_0^{+\infty} y^2\, dt + a^4 \int_0^{+\infty} t^2 y^2\, dt \geq 0.$$

Искомое неравенство вытекает из неотрицательности квадратного трехчлена. $\square$

Неравенство Брунна-Минковского

Мы докажем сначала "функциональную" версию неравенства Брунна-Минковского.

Теорема 5. *Пусть f, g, h — неотрицательные измеримые функции из $L^1(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющие условию*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f^{\lambda}(x) g^{1-\lambda}(y), \tag{5}$$

для некоторого $0 \leq \lambda \leq 1$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^d$. Тогда выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \; dx \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f \; dx \Big)^{\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g \; dx \Big)^{1-\lambda}.$$

Доказательство. **d=1**. Без ограничения общности считаем, что f, g положительны и непрерывны. Построим такие монотонные функции $x(t), y(t)$ на $[0,1]$, что

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f(s) \; ds = t \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \; ds, \;\; \int_{-\infty}^{y(t)} g(s) \; ds = t \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \; ds$$

(почему такие существуют?). В частности

$$x'(t)f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\ ds,\ \ y'(t)g(y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\ ds. \tag{6}$$

Положим $z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)$. Тогда в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}.$$

По формуле замены переменных

$$\int_{\mathbb{R}} h(t)\ dt = \int_0^1 h(z(t))z'(t)\ dt \geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}\ dt.$$

Последний интеграл равен $\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\ ds\Big)^{\lambda}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\ ds\Big)^{1-\lambda}$ в силу (6).

Индукция по размерности. Пусть для простоты $d = 2$. Тогда

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geq f^{\lambda}(x_1, y_1)g^{1-\lambda}(x_2, y_2).$$

Применяя доказанное неравенство по переменной y, получаем, что для всех x_1, x_2

$$\int_{\mathbb{R}} h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y)\ dy \geq \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, y)\ dy\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}} g(x_2, y)\ dy\Big)^{1-\lambda}.$$

Следовательно, функции $h_1(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\ dy$, $f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dy$, $g_1(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\ dy$ тоже удовлетворяют неравенству

$$h_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge f_1^{\lambda}(x_1) g_1^{1-\lambda}(x_2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}} h_1(x)\ dx \ge \Big(\int_{\mathbb{R}} f_1\ dx\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}} g_1\ dx\Big)^{1-\lambda} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy\Big)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

$\square$

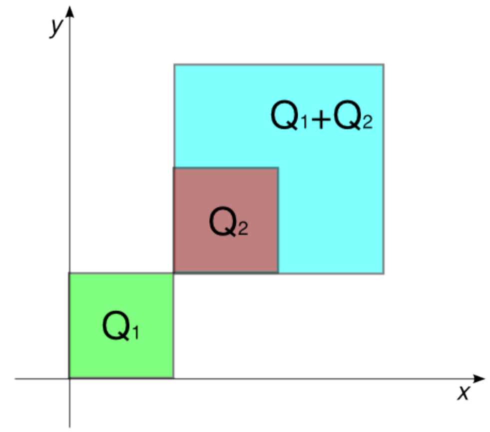
Применив неравенство к индикаторам **компактных** множеств A, B: $f = I_A$, $g = I_B$, получаем одну из форм **неравенства Брунна-Минковского**

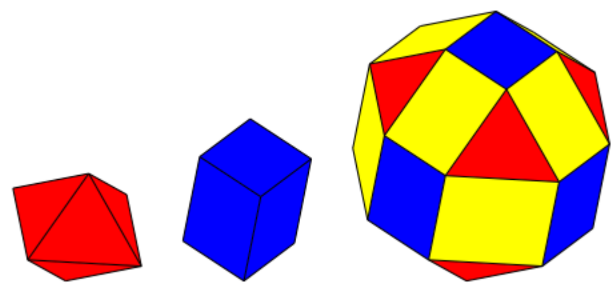
$$\lambda(tA + (1-t)B) \ge \Big[\lambda(A)\Big]^t \Big[\lambda(B)\Big]^{1-t},\ 0 \le t \le 1. \tag{7}$$

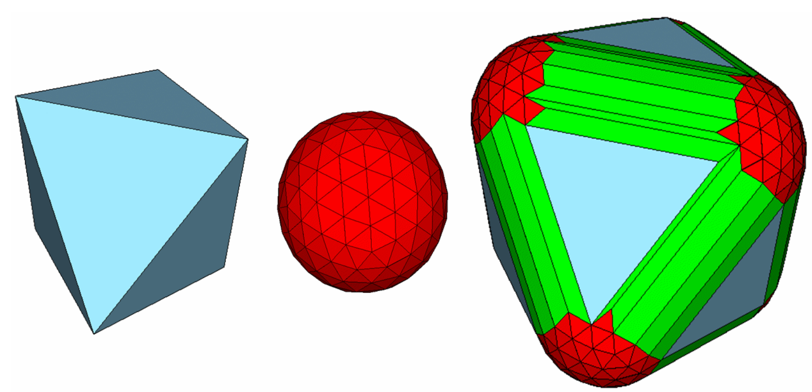
Замечание 1. *Под* $A + B$ *подразумевается* **суммирование по Минковскому**

$$A + B = \{z :\ \ z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Суммирование по Минковскому







Неравенство Брунна-Минковского:

Брунн (1887) для выпуклых множеств в $\mathbb{R}^3$

Минковский для выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$

Люстерник, Хадвигер & Макбет и др. для компактных множеств в $\mathbb{R}^d$

Упражнение 1. *Вывести из (7) классическое неравенство Брунна-Минковского*

$$\Big[\lambda(A+B)\Big]^{\frac{1}{d}} \geq \Big[\lambda(A)\Big]^{\frac{1}{d}} + \Big[\lambda(B)\Big]^{\frac{1}{d}}.$$

Указание: примените (7) к $\frac{1}{\lambda^{1/d}(A)}A$, $\frac{1}{\lambda^{1/d}(B)}B$, $t = \frac{\lambda^{1/d}(A)}{\lambda^{1/d}(A)+\lambda^{1/d}(B)}$

Из неравенства Брунна-Минковского следует изопериметрическое неравенство.

Положим $B = B_r = \{x : |x| \le r\}$. В силу неравенства Брунна-Минковского

$$\frac{1}{r}\Big[\lambda(B_r)\Big]^{\frac{1}{d}} \le \underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\Big[\lambda(A+B_r)\Big]^{\frac{1}{d}} - \Big[\lambda(A)\Big]^{\frac{1}{d}}}{r}.$$

Заметим, что в левой части находится объем d-мерного шара радиуса 1 в степени $\frac{1}{d}$. В правой части получаем $\frac{1}{d}\Big[\lambda(A)\Big]^{-1+\frac{1}{d}}\mathcal{H}^{d-1}(\partial A)$. Таким образом

$$\kappa_d \cdot \lambda^{1-\frac{1}{d}}(A) \le \mathcal{H}^{d-1}(\partial A),$$

где

$$\kappa_d = d \cdot \lambda^{\frac{1}{d}}(B_1). \tag{8}$$

Это и есть изопериметрическое неравенство. При этом нетрудно понять, что оно обращается в точное равенство, если и только если A является шаром.

Литература

1. Богачев В.И., Основы теории меры, т. 1, 2. РХД, Москва – Ижевск, 2006.

2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М., Сборник задач по оптимизации, М.: Наука, 1984.

3. Barthe F., Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

4. Gardner R.J., The Brunn-Minkowski inequality.