

Группы и алгебры Ли
Листок 10
Представления: основы

1. Рассмотрим неприводимые представления V, W группы Ли G . Докажите, что пространство инвариантов $(V \otimes W^*)^G$ равно нулю, если V не изоморфно W . Докажите, что $(V \otimes V^*)^G$ изоморфно \mathbb{C} .
2. Пусть V – неприводимое представление алгебры Ли \mathfrak{g} . Докажите, что V^* тоже неприводимо
3. Докажите, что оператор конечного порядка на конечномерном комплексном пространстве диагонализуем.
4. Пусть V – представление алгебры Ли \mathfrak{g} . Определим пространство коинвариантов по формуле $V_{\mathfrak{g}} = V/\mathfrak{g}V$, где $\mathfrak{g}V$ – подпространство, порождённое векторами xv , $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. Докажите, что если V вполне приводимо, то композиция $V^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow V \rightarrow V_{\mathfrak{g}}$ является изоморфизмом ($V^{\mathfrak{g}}$ – пространство \mathfrak{g} -инвариантов в V).
5. Приведите пример, когда пространства $V^{\mathfrak{g}}$ и $V_{\mathfrak{g}}$ не изоморфны.
6. Докажите, что вторая симметрическая степень двумерного векторного представления SL_2 изоморфна присоединённому представлению.