Листок 13. Физические приложения кратных интегралов

Анализ, 2 курс, **22.04.2013**

Все встречающиеся физические константы, значение которых не указано, считать равными 1.

13◇1 **а)** На горизонтальной круглой дощечке $\{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ горкой насыпан песок так что высота слоя над каждой точкой равна половине расстояния до края. Найдите массу песка, считая плотность равной 1.

б) По полукруглому жёлобу радиуса R (сечение задано неравенствами $x^2 + z^2 \leqslant R^2$ и $z \leqslant 0$) течёт талая вода со скоростью, пропорциональной корню из расстояния до стенки жёлоба, и со значением v в самом быстром месте. Сколько талой воды уносит жёлоб за секунду?

13◇2 Найдите центр масс и тензор момента инерции полушара в $\mathbb{R}^3$, заданного неравенствами $z \geqslant 0$ и $z^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

13◇3 Найдите тензоры момента инерции J_A и J_S кольца $A = \{r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ в $\mathbb{R}^2$ и сферического слоя $S = \{r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$ в $\mathbb{R}^3$ $(R > r > 0)$, а также пределы

$$\lim_{r\to R} \frac{J_A(r,R)}{R-r} \qquad \text{и} \qquad \lim_{r\to R} \frac{J_S(r,R)}{R-r}.$$

13◇4 Учёные-вулканологи установили, что планета Вулкан имеет плотность, линейно зависимую от расстояния r от центра планеты ($\rho = a \cdot r + b$), ту же массу M и тот же радиус R, что и Земля, а тензор момента инерции планеты на 20% меньше, чем у Земли. Найдите плотность Вулкана на поверхности и в центре планеты.

13◇5 Пусть $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$ — положительно определённая квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — ортонормированный базис для g, а $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Далее, пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция в $\mathbb{R}^n$, интегрируемая по Лебегу, а $f(y_1, \ldots, y_n)$ — её выражение в y-координатах. Найдите выражение интеграла $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy_1 \ldots dy_n$ в x-координатах в терминах матрицы (g_{ij}).

13◇6 Полусфера $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geqslant 0\}$ освещена сверху равномерным вертикальным солнечным светом. Найдите выражение плотности интенсивности освещения в сферических координатах на полусфере.

13◇7 Кусок проволоки в форме полукруга $\{x^2 + y^2 = R^2, y \geqslant 0\}$ помещён в температурное поле $t^\circ(x, y) = y$ (температура в °C) и поглощает энергию с интенсивностью, пропорциональной температуре. Найдите суммарную энергию, поглощаемую куском проволоки.

13◇8 Найдите напряжение U, индуцируемое электическим полем $\vec{E} = (z, x, y)$, в замкнутом куске проволоки γ в форме, заданной параметрически формулами $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = h\sin\varphi$. (Примечание: Напряжение U — это криволинейный интеграл второго рода $\int_\gamma E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz$, где E_x, E_y, E_z — компоненты векторного поля $\vec{E}$.)

См. на обороте!

Под *телом* (как “твёрдое тело” в физике) мы будем понимать ограниченную область G в $\mathbb{R}^n$, обычно в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$, вместе с указанием функции плотности $\rho > 0$ в этой области. Если плотность не указывается, то подразумевается что ρ тождественно равно 1. *Масса* тела есть интеграл $m = \int_G \rho(x) dx_1 ... dx_n$, и, значит, $m = \int_G \rho(x, y, z) dxdydz$ и, соответственно, $m = \int_G \rho(x, y) dxdy$ в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.
Центр масс тела — это вектор $\vec{r}_c$ с компонентами

$$r_{c,i} = \frac{1}{m} \int_G x_i \rho(x) dx_1 ... dx_n.$$

Тензор момента инерции тела относительно точки $a = (a_1, ..., a_n)$ — это матрица J с компонентами

$$J_{ij} = \int_G (x_i - a_i)(x_j - a_j) \rho(x) dx_1 ... dx_n.$$

Если точка a не указана, то подразумевается, что это центр масс тела. Собственные значения матрицы J называются *главными моментами инерции* тела относительно точки a, и *главными центральными моментами инерции*, если a — центр масс.