

**Группы и алгебры Ли**  
**Листок 11**  
**Представления: примеры**

1. Докажите, что комплексификация  $\mathfrak{u}_n$  изоморфна  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Опишите комплексификацию  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ .
2. Докажите, что любое представление алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  может быть снабжено структурой представления алгебры Ли  $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ .
3. Пусть  $V$  – двумерное векторное представление  $SL_2(\mathbb{C})$ . При каких  $k$  симметрическая степень  $S^k(V)$  является представлением группы  $SO_3(\mathbb{R})$ ?
4. Опишите все неприводимые представления группы  $S^1$ .
5. Разложите тензорный квадрат векторного представления  $GL_n(\mathbb{C})$  на неприводимые компоненты.
6. При каких  $n$  векторное представление группы  $SL_n(\mathbb{C})$  изоморфно своему двойственному представлению? Тот же вопрос про  $GL_n(\mathbb{C})$ .