Абелевы группы и модули над кольцами

12.1. Вычислите **а)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; **б)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; **в)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

12.2. Абелева группа A содержит в качестве подгруппы $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, а факторгруппа изоморфна $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ (числа p и q простые). Чему может быть изоморфна группа A?

12.3. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^n$ — решётка полного ранга (т.е. подмодуль, ранг которого равен n), $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L. Докажите, что объём параллелепипеда, натянутого на $e_1, \ldots, e_n$, не зависит от выбора базиса в L. Чему он равен?

12.4. Пусть $M = \mathbb{Z}^n$, $F\colon M \to M$ — гомоморфизм. Докажите, что:

а) группа $A/\operatorname{Im} F$ конечна тогда и только тогда, когда $\det F \neq 0$;

б) порядок этой группы равен $|\det F|$.

12.5. Найдите примарное разложение группы $\mathbb{Z}^3/R\mathbb{Z}^3$, где $R = \langle (5,5,8), (5,6,7), (3,5,9) \rangle$.

12.6. Пусть $d_A(n)$ — количество элементов, аннулируемых умножением на n, в абелевой группе A.

а) Докажите, что если группа A конечна и при этом $d_A(n) \leqslant n$, то A циклическая.

б*) Пусть $d_A = d_B$ для конечных абелевых групп A и B. Верно ли, что группы A и B изоморфны?

12.7*. Разложите группу обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где m произвольно, в прямую сумму циклических.

12.8 (Нормальная форма Фробениуса). Выведите из теоремы о конечно порожденных модулях над евклидовыми кольцами следующее утверждение: матрицу линейного оператора $A \in \mathrm{Mat}_n(C)$ можно привести подходящей заменой базиса к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

где a_i — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A.

12.9. Выведите из предыдущей задачи теорему Гамильтона–Кэли.

12.10*. Придумайте и докажите теорему о каноническом виде линейного оператора над полем вещественных чисел.

12.11*. Придумайте и докажите теорему о каноническом виде четырехмерного линейного оператора над полем $\mathbb{F}_2$.

12.12*. Пусть M — свободный модуль над кольцом главных идеалов A, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис M, $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in M$, где $x_i \in A$. Докажите, что подмодуль $\langle u \rangle$ выделяется прямым слагаемым в M тогда и только тогда, когда идеал $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1)$.

12.13*. **а)** Докажите, что подмодуль конечно порожденного модуля над кольцом главных идеалов конечно порожден. (На самом деле это утверждение верно для гораздо более широкого класса колец, в частности, для нетеровых колец.)

б) Приведите пример конечно порожденного модуля, имеющего подмодуль, который не является конечно порожденным.

Правила игры. Оценка 10 ставится за сдачу 80% задач без звёздочек. Задачи без звёздочек, сданные после **17 мая**, засчитываются с половинным баллом.