

Группы и алгебры Ли
Листок 12
Представления \mathfrak{sl}_2

1. Пусть $\rho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление алгебры \mathfrak{sl}_2 . Докажите, что оператор $\rho(e)\rho(f) + \rho(f)\rho(e) + \frac{1}{2}\rho(h)^2$ действует умножением на скаляр.

Указание: докажите, что этот оператор является эндоморфизмом представления ρ .

2. Докажите, что симметрическая степень $S^k(V)$ двумерного неприводимого представления V алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 является неприводимым представлением. Постройте собственный относительно оператора h базис в $S^k(V)$. Вычислите явно действие операторов f и e в этом базисе.

3. Вычислите действие оператора из задачи 1 в представлении $S^k(V)$.

4. Постройте бесконечномерное неразложимое приводимое представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 .

5. Разложите тензорные квадрат и куб двумерного неприводимого представления \mathfrak{sl}_2 на неприводимые подпредставления.

6. Рассмотрим следующий базис алгебры Ли \mathfrak{so}_3 :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислите коммутаторы между этими матрицами. Используя изоморфизм $\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{so}_3$, запишите образ выражения $ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ через J_x, J_y, J_z .