Применение тензорного произведения в народном хозяйстве

Напомним, что классическая теорема Бойяи–Гервина утверждает, что любые два многоугольника равной площади равносоставлены (один из них всегда можно разрезать на части, из которых можно сложить второй). Выясним, верно ли аналогичное утверждение в трёхмерном пространстве.

Третья проблема Гильберта. Являются ли куб и правильный тетраэдр равного объема равносоставленными (т.е. можно ли куб разрезать на несколько многогранников и сложить из них правильный тетраэдр того же объема)?

Инвариант Дена lite. Прежде чем приступать к третьей проблеме Гильберта, решим следующую задачу: можно ли разрезать прямоугольник 1×2 на конечное число прямоугольников *со сторонами, параллельными сторонам исходного* и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, если прямоугольники запрещается поворачивать?

$13\frac{1}{2}$.1. Пусть прямоугольник P имеет стороны a и b. Обозначим через $D(P)$ элемент $a \otimes b$ в тензорном произведении $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Докажите следующие утверждения:

а) Если отрезок разбивает прямоугольник P на два, P_1 и P_2, то $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$.

б) Инвариант D аддитивен: если прямоугольник P разбит на прямоугольники P_i, то $D(P) = \sum D(P_i)$.

в) Прямоугольник 1×2 нельзя разрезать на конечное число прямоугольников и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. (В этой задаче стороны всех прямоугольников параллельны осям координат.)

Инвариант Дена. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^3$ (например, выпуклый). Обозначим через ℓ_i длины его ребер, а через α_i величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника P называется элемент $\mathrm{Dehn}(P) := \sum \ell_i \otimes \frac{\alpha_i}{\pi}$ пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$.

$13\frac{1}{2}$.2. а) Докажите, что если плоскость разбивает многогранник P на два многогранника, P_1 и P_2, то $\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P_1) + \mathrm{Dehn}(P_2)$.

б) Инвариант Дена аддитивен: если многогранник P разбит на многогранники P_i, то $\mathrm{Dehn}(P) = \sum \mathrm{Dehn}(P_i)$ (отсюда следует, в частности, что инварианты Дена у двух равносоставленных многогранников совпадают).

$13\frac{1}{2}$.3. а) (Многочлены Чебышёва) Докажите, что $\cos n\varphi$ — многочлен от $\cos\varphi$. Чему равен коэффициент при его старшей степени?

б) Докажите, что угол $\arccos 1/3$ не является рациональным кратным π.

$13\frac{1}{2}$.4. Решите третью проблему Гильберта.

Историческая справка. Инвариант Дена придумал ученик Гильберта Макс Ден (Max Dehn) в конце XIX — начале XX века (по всей видимости, третья проблема Гильберта была решена еще до того, как Гильберт сформулировал свой список проблем). Через 60 с лишним лет после этого швейцарский математик Жан-Пьер Сидле (Jean-Pierre Sydler) доказал и обратное утверждение: если два многогранника имеют равные объемы и инварианты Дена, то они равносоставлены.

Правила игры. Это дополнительный листок. Задачи из него можно сдавать до начала сессии. 10 баллов за листок ставятся за решение всех задач; эти баллы являются бонусными и учитываются в итоговой оценке с весом, равным половине веса обязательного листка.