Тензорные произведения

13.1. Верно ли, что среди векторов $v_i \in V_i$ есть нулевой тогда и только тогда, когда любое полилинейное отображение $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ обращается в нуль на этом наборе векторов?

13.2. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонические изоморфизмы:

а) $U \otimes V \cong V \otimes U$;

б) $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$;

в) $(U \oplus V) \otimes W \cong (U \oplus W) \otimes (V \oplus W)$;

г) $(U \otimes V)^* \cong U^* \otimes V^*$;

д) $U^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(U, W)$;

е) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \cong \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$.

13.3. Найдите размерность пространства билинейных форм $\varphi\colon V \times V \to K$, удовлетворяющих для любых $u, v \in V$ условиям: **а)** $\varphi(v, v) = 0$; **б)** $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

13.4. Найдите размерность пространства трилинейных форм $\varphi\colon V \times V \times V \to K$, удовлетворяющих для любых $u, v, w \in V$ условиям:

а) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$; **б)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$;

в) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, w)$; **г)** $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$; **д*)** $\varphi(u, u, u) = 0$;

е*) $\varphi(u, v, w) = \varphi(w, v, u)$; **ж*)** $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$.

13.5. Пусть $\mathscr{E} \in \mathrm{End}(V)$ — тождественный оператор, а $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(W)$ — вложение. Верно ли, что $\mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ — вложение?

13.6. Определите цикловой тип (т.е. набор размеров жордановых клеток) тензорного квадрата нильпотентного оператора, если цикловой тип самого оператора равен:

а) (n); **б)** $(4, 2)$; **в)** (n, n); **г*)** произволен.

13.7. Проверьте, что отображение Сегре

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1) \times \dots \times \mathbb{P}(V_k) &\to \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k), \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_k, \end{aligned}$$

корректно определено и является вложением.

13.8*. Пусть $\sigma\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ — вложение Сегре, где $N = mn + m + n$.

а) Докажите, что $\mathrm{Im}\,\sigma$ является гладким многообразием в $\mathbb{P}^N$, и найдите его размерность.

б) Рассмотрим идеал $I \subset K[x_0, \dots, x_N]$, порожденный всеми *однородными* многочленами на $\mathbb{P}^N$, обращающимися в нуль на $\mathrm{Im}\,\sigma$ (подумайте, почему это определение корректно и зачем нужна однородность). Является ли этот идеал простым? (Если общий случай вызывает трудности, можно начать со случая $m = n = 1$).

Правила игры. Оценка 10 ставится за сдачу 80% задач без звёздочек. Задачи без звёздочек, сданные после **7 июня**, засчитываются с половинным баллом.