Нелинейные интегрируемые уравнения и их решения

Содержание

Вводные замечания об интегрируемых системах

До 60-х годов XX века список задач классической и квантовой физики, допускающих в том или ином смысле точное решение, исчерпывался всего несколькими примерами (некоторые задачи о волчках в классической механике, модель Изинга, модель Гейзенберга). Они казались экзотическими исключениями.

В 60-70-х годах ситуация существенно изменилась. Были открыты целые большие семейства нетривиальных точно решаемых моделей и поняты принципы, лежащие в основе их построения и интегрируемости. При этом оказалось, что многие из них появляются, подчас совершенно неожиданно, в самых разных физических контекстах и имеют непосредственное отношение к устройству нашего мира.

Какие бывают интегрируемые системы

Можно выделить несколько важных типов:

- Модели с малым числом степеней свободы: интегрируемые случаи волчков.
- Системы N взаимодействующих частиц в одном измерении: модель Калоджеро и все ее родственники (классические и квантовые)
- Нелинейные уравнения в частных производных, а также разностные уравнения: Кортевега – де Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), sin-Gordon (СГ), цепочка Тоды, Кадомцева-Петвиашвили (КП) и множество других.
- Модели статистической механики на двумерной решетке: модель Изинга, 6-ти и 8-вершинные модели и их обобщения.
- Интегрируемые модели квантовой физики на одномерной решетке: спиновые цепочки XXX, XXZ, XYZ, и их разнообразные обобщения.
- Интегрируемые модели квантовой теории поля в $1+1$ измерениях: одномерный бозе-газ (квантовое НУШ), модель Тирринга, sin-Gordon, ...

Разделение весьма условно и перечень заведомо не полон. Между всеми этими типами моделей имеются красивые и глубокие связи. Например, взаимосвязь классических и квантовых систем не исчерпывается их соответствием в классическом пределе. Оказывается, что классические интегрируемые уравнения возникают в квантовых интегрируемых задачах даже при $\hbar \neq 0$.

В каком смысле следует понимать интегрируемость системы

Единого мнения здесь нет. Вот несколько распространенных смыслов:

Возможность проинтегрировать уравнение (т.е. устранить все производные).

Наличие полного набора интегралов движения в инволюции (интегрируемость по Лиувиллю).

Наличие большого запаса точных решений и возможность выразить ответ через известные элементарные функции или спецфункции.

Возможность свести задачу к решению конечной системы алгебраических или интегральных уравнений.

Наличие богатой симметрии и интересных алгебраических или аналитических структур.

Нелинейные интегрируемые уравнения в частных производных: еще несколько вводных слов

В первом приближении мир описывается *линейными уравнениями*, поскольку отклик на малое воздействие обычно пропорционален этому воздействию (“обобщенный закон Гука”). Основное содержание стандартных курсов математической физики – это по сути теория всего трех линейных уравнений в частных производных: уравнения Лапласа, уравнения теплопроводности и волнового уравнения, фундаментальных роль которых объясняется их исключительной универсальностью.

Однако, нелинейные эффекты, даже если они малы, могут приводить к большим последствиям. За несколько прошедших десятилетий было понято, что

а) описывающие их нелинейные уравнения имеют практически столь же высокую степень универсальности, что и уравнения линейной математической физики;

б) эти уравнения обладают богатыми скрытыми симметриями, позволяющими в ряде случаев находить точные решения (например, солитонного типа).

Каждое из нелинейных интегрируемых уравнений порождает бесконечную цепочку совместных с ним “высших уравнений” – *иерархию*. Кроме того, все известные интегрируемые уравнения (КдФ, НУШ, СГ, цепочка Тоды, КП и многие другие) – близкие родственники. С совсем общей точки зрения почти все они содержатся (как предельные и частные случаи, редукции, эквивалентные формы, полученные заменами переменных и т.п.) в *одном* универсальном уравнении - *билинейном разностном уравнении Хироты.*

1 Уравнение КдФ

Было предложено в 1895 г. для описания волн на мелкой воде. Распространение возмущений в нелинейной среде с дисперсией в случае общего положения также происходит согласно уравнению КдФ.

Наводящие соображения таковы. Волновое уравнение $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ имеет общее решение в виде суперпозиции волн, бегущих направо и налево со скоростью c: $u(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)$. Будем следить только за волной, бегущей налево; она подчиняется уравнению первого порядка $u_t = cu_x$. Нелинейные эффекты приводят к тому, что скорость волны начинает зависеть от амплитуды; в первом порядке эту зависимость можно считать линейной: $c(u) = c + \alpha u + \ldots$. Таким образом, учет нелинейности дает добавку $\alpha u u_x$, а учет дисперсии - член с третьей производной:

$$u_t = cu_x \qquad \longrightarrow \qquad u_t = cu_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxx}$$

(при наличии члена со второй производной динамика становится диссипативной). Коэффициенты перед поправочными членами могут быть малы, но если u велико или быстро меняется, эти члены становятся существенными. Если перейти в систему отсчета, двигающуюся налево со скоростью c, получим уравнение КдФ

$$u_t = \alpha u u_x + \beta u_{xxx} \tag{1.1}$$

В предельном случае $\alpha = 0$ (отсутствует нелинейность) уравнение решается преобразованием Фурье. При $\beta = 0$ (отсутствует дисперсия) имеем уравнение Хопфа $u_t = \alpha u u_x$, которое, как и любое уравнение вида $u_t = V(u)u_x$, решается методом характеристик. Общее решение записывается в неявном виде $x + \alpha ut = f(u)$ с произвольной функцией f. Замечательно, что в общем случае $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ уравнение (1.1) тоже можно проинтегрировать, хотя и совсем другими методами.

Выбором системы единиц можно избавиться от коэффициентов α, β. По причинам, которые выяснятся позднее, зафиксируем их следующим образом: $\alpha = 3/2$, $\beta = 1/4$, так что уравнение КдФ примет вид

$$\boxed{4u_t = 6uu_x + u_{xxx}} \tag{1.2}$$

который будем называть каноническим.

1.1 Представление Лакса

Утверждение. *Уравнение КдФ (1.2) эквивалентно операторному соотношению*

$$\partial_t L = [A,\, L] \tag{1.3}$$

где $L = \partial^2 + u, \quad A = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x, \quad \partial := \partial/\partial x.$

Уравнение (1.3) называется уравнением (или представлением) Лакса (для КдФ), а L– оператором Лакса. Уравнение Лакса можно еще записать в виде $[\partial_t - A,\, L] = 0$. Отметим, что L – эрмитов оператор ($L^\dagger = L$), а A – антиэрмитов ($A^\dagger = -A$).

Задача. Доказать, что если справедливо уравнение Лакса для L, то любая целая положительная степень оператора L удовлетворяет тому же уравнению: $\partial_t L^n = [A,\, L^n]$.

Представление Лакса означает, что $L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t)$, где U – некоторый оператор (при этом $A = \partial_t U\, U^{-1}$). Отсюда следует важнейший вывод:

спектр оператора L не зависит от времени

т.е. является интегралом движения. Соответственно, не зависят от времени $\det(\lambda - L)$, $\operatorname{tr}(\lambda - L)^{-1}$ и т.д. Разлагая эти величины по степеням λ, в принципе можно построить бесконечный набор интегралов движения. Практически, однако, на этом пути возникают две проблемы: а) требуется уточнить, как понимать операции det и tr для операторов в функциональном пространстве, б) неясно, как выделить из этого семейства локальные интегралы движения, т.е. такие, плотности которых в любой точке зависят только от значения функции u и ее производных по x в этой точке.

1.2 Симметрии и законы сохранения

Под симметрией дифференциального уравнения $\partial_t u = K[u]$ мы понимаем уравнение $\partial_s u = R[u]$ такое, что эволюции по t и по s коммутируют: $\partial_s K[u] = \partial_t R[u]$. Это означает, что любое решение $u(x,t)$ первого уравнения можно продолжить до функции $u(x,t,s)$ так, что при любом фиксированном s она является решением первого уравнения (а при любом фиксированном t – второго уравнения), и $u(x,t,0) = u(x,t)$.

Если коэффициенты дифференциального полинома $K[u]$ не зависят от x и t, у уравнения $\partial_t u = K[u]$ всегда есть две тривиальные симметрии – сдвиги переменных x и t.

Упражнение. Выразить эти симметрии в дифференциальном виде $\partial_s u = R[u]$.

Задача. Найти какую-нибудь нетривиальную симметрию уравнения $\partial_t u = u u_x$.

Оказывается, уравнение КдФ имеет бесконечно много нетривиальных симметрий. Они проще всего находятся с помощью псевдодифференциальных операторов.

1.2.1 Псевдодифференциальные операторы

Псевдодифференциальный оператор – это ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k \partial^{N-k}$ где v_k – функции, а оператор ∂ имеет следующий стандартный закон коммутации с любой функцией: $\partial f = f' + f\partial$. Умножив обе части этого равенства на ∂^{-1} слева и справа, его можно также понимать как правило проноса оператора ∂^{-1} через функцию: $\partial^{-1} f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f' \partial^{-1}$. Многократное применение дает

$$\partial^{-1} f = f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} + \dots$$

Псевдодифференциальные операторы перемножаются как ряды Лорана с учетом некоммутативности символа ∂ с коэффициентными функциями. Например,

$$(1 + f\partial^{-1})(1 + g\partial^{-1}) = 1 + (f+g)\partial^{-1} + fg\partial^{-2} - fg'\partial^{-3} + fg''\partial^{-4} + \dots$$

Замечание. Мы для краткости пишем ∂f, понимая под этим композицию оператора умножения на функцию f и оператора дифференцирования ∂, надеясь, что это не приведет к недоразумениям. Композиция обычно записывается как $\partial \circ f$, но педантичное использование этого обозначения на наш взгляд затрудняет чтение формул.

Упражнение. Для любых функций f, g доказать следующие тождества в алгебре псевдодифференциальных операторов:

а) $\quad (\partial - g)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{(n)} (\partial - g)^{-n-1}$

б) $\quad e^{-f} \partial^{-1} e^f = (\partial + f')^{-1}$

в) $\quad \partial^n f = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)} \partial^{n-k}, \quad n \geq 0$

г) $\quad \partial^{-n} f = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\begin{array}{c} k+n-1 \\ k \end{array} \right) f^{(k)} \partial^{-n-k}, \quad n > 0$

Здесь $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент. Заметим, что формулы в) и г) можно объединить в одну, если распространить определение биномиального коэффициента на произвольные комплексные числа n с помощью формулы

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

тогда при $n < 0$ $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = (-1)^k \left(\begin{array}{c} k-n-1 \\ k \end{array} \right)$. Для доказательства формул в) и г) можно воспользоваться индукцией по n.

Пусть дан псевдодифференциальный оператор $P = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \partial^{N-k}$. Число N называется порядком псевдодифференциального оператора. Будем обозначать P_+ его дифференциальную часть (т.е. сумму членов с неотрицательными степенями оператора ∂: $P_+ = \sum_{k=0}^{N} v_k \partial^{N-k}$), тогда $P_- = P - P_+$ – сумма членов с отрицательными степенями.

Введем еще важное понятие вычета псевдодифференциального оператора $P = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \partial^{N-k}$:

$$\operatorname{res} P = v_{-1}.$$

Отметим, что оператор P можно записывать, располагая степени символа ∂ как справа, так и слева от коэффициентных функций:

$$P = \sum_k v_k \partial^k = \sum_k \partial^k \tilde{v}_k$$

Задача. Доказать, что вычет не зависит от способа записи, т.е. $\operatorname{res} P = v_{-1} = \tilde{v}_{-1}$. (Для остальных коэффициентных функций это, вообще говоря, не так.)

Далее нам понадобится следующее свойство операции res: для любых двух псевдодифференциальных операторов вычет их коммутатора является полной производной.

Лемма. *Для любых псевдодифференциальных операторов P, Q*

$$res([P, Q]) = \partial C$$

где C – некоторый дифференциальный полином от коэффициентов операторов P, Q, т.е. линейная комбинация произведений этих коэффициентов и их производных по x любого порядка.

Для доказательства, очевидно, достаточно проверить это утверждение в случае $P = f\partial^n$, $Q = g\partial^{-m}$, где $n > m > 0$. Пользуясь результатами упражнений в) и г), можно заключить, что вычет коммутатора пропорционален

$$fg^{(n-m+1)} + (-1)^{n-m} g f^{(n-m+1)} = \partial \left(\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-m-k)} \right)$$

т.е. является полной производной. Можно дать также и другое, индуктивное доказательство, не использующее результатов упражнения: предположить, что вычет коммутатора $f\partial^n$ и $g\partial^{-m}$ – полная производная при всех n и каком-то m (например, при $m = 1$ это легко проверяется) и вывести отсюда это же утверждение для $m \to m + 1$.

Задача. Дать подробное доказательство леммы.

На псевдодифференциальные операторы можно распространить операцию сопряжения, определенную как $\partial^\dagger = -\partial$, $f^\dagger = f$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k \partial^{N-k} \right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} (-\partial)^{N-k} v_k \tag{1.4}$$

Следующая техническая лемма, связывающая понятия операторного и обычного вычетов, оказывается полезной во многих случаях.

Лемма. *Пусть $P = \sum_j p_j \partial^j$ и $Q = \sum_j q_j \partial^j$ – два псевдодифференциальных оператора, тогда*

$$res_\partial(PQ^\dagger) = res_z \left[\left(Pe^{xz} \right) \left(Qe^{-xz} \right) \right] \tag{1.5}$$

где через $\operatorname{res}_\partial$ и res_z обозначены соответственно операторный и обычный вычет (коэффициент ряда Лорана при члене z^{-1}). (При этом подразумевается, что правило действия оператора ∂^n на экспоненту $\partial^n e^{xz} = z^n e^{xz}$ распространяется и на отрицательные значения n, т.е., например, $\partial^{-1} e^{xz} = z^{-1} e^{xz}$.)

Действительно,

$$\operatorname{res}_z \left[\left(Pe^{xz} \right) \left(Qe^{-xz} \right) \right] = \operatorname{res}_z \Big(\sum_i p_i z^i \sum_j q_i (-z)^j \Big) = \sum_{i+j=-1} (-1)^j p_i q_j$$

и то же самое получается при раскрытии $\operatorname{res}_\partial(PQ^\dagger)$:

$$\operatorname{res}_\partial(PQ^\dagger) = \operatorname{res}_\partial \Big(\sum_{i,j} p_i \partial^i (-\partial)^j q_j \Big) = \sum_{i+j=-1} (-1)^j p_i q_j$$

С помощью псевдодифференциальных операторов можно извлечь квадратный корень из $L = \partial^2 + u$:

$$(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \frac{u}{2}\,\partial^{-1} - \frac{u_x}{4}\,\partial^{-2} + \frac{u_{xx} - u^2}{8}\,\partial^{-3} - \frac{u_{xxx} - 6uu_x}{16}\,\partial^{-4} + \ldots$$

Отметим, что если символ ∂ коммутирует с u (например, если $u = \mathrm{const}$), производные в правой части исчезают и получается обычное разложение функции $\sqrt{\partial^2 + u}$ в ряд Лорана. Можно также определить любые полуцелые степени оператора L: $L^{n/2} = (L^{1/2})^n$. Легко убедиться, что все они коммутируют с L.

1.2.2 Иерархия КдФ

Нетрудно проверить, что

$$A = (L^{3/2})_+$$

$$K[u] = \tfrac{3}{2}uu_x + \tfrac{1}{4}u_{xxx} = 2\partial\,\mathrm{res}\,L^{3/2}$$

так что уравнение Лакса запишется в виде $\partial_t L = [(L^{3/2})_+,\, L]$, а само уравнение КдФ – в виде $\partial_t u = 2\partial\,\mathrm{res}\,L^{3/2}$. В этих терминах все его симметрии записываются совершенно однотипно – достаточно вместо степени 3/2 взять любую другую полуцелую степень оператора L.

Утверждение. *Уравнения Лакса*

$$\partial_{t_k} L = [A_k,\, L]\,, \qquad A_k = (L^{k/2})_+ \tag{1.6}$$

для всех нечетных $k \geq 1$ порождают уравнения

$$\partial_{t_k} u = 2\partial\,\mathrm{res} L^{k/2} \tag{1.7}$$

которые являются симметриями уравнения КдФ.

Совокупность уравнений (1.7) называется иерархией КдФ. Любое уравнение вида $\partial_t u = \sum_j c_j\,\partial\,\mathrm{res} L^{j/2}$, где c_j – любые константы, также считается принадлежащим этой иерархии. Само КдФ получается при $k = 3$, если отождествить $t_3 = t$. При $k = 1$ имеем $u_{t_1} = u_x$, что позволяет отождествить $t_1 = x + c$. Вот первые три уравнения иерархии КдФ:

$$u_{t_1} = u_x$$

$$4u_{t_3} = 6uu_x + u_{xxx}$$

$$16u_{t_5} = 30u^2u_x + 20u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx}$$

Для доказательства утверждения надо проверить два факта: что в каждом из уравнений Лакса справа действительно стоит оператор умножения на функцию (и что он имеет вид $2\partial\,\mathrm{res}\,L^{k/2}$), а также что $\partial_{t_k}\mathrm{res}\,L^{3/2}=\partial_{t_3}\mathrm{res}\,L^{k/2}$. Первое следует из равенства

$$[(L^{k/2})_+,\,L]=-\,[(L^{k/2})_-,\,L] \tag{1.8}$$

(в левой части – чисто дифференциальный оператор, а в правой – неположительные степени ∂, откуда вытекает, что в обеих частях стоит оператор умножения на функцию), а второе верно даже в более общем виде $\partial_{t_k}\mathrm{res}\,L^{m/2}=\partial_{t_m}\mathrm{res}\,L^{k/2}$ для любой пары времен t_k,t_m и доказывается следующей цепочкой равенств:

$$\partial_{t_k}\mathrm{res}\,L^{m/2}=\mathrm{res}\,(\partial_{t_k}L^{m/2})=\mathrm{res}\,\Big([(L^{k/2})_+,L^{m/2}]\Big)$$

$$=\mathrm{res}\,\Big([(L^{k/2})_+,(L^{m/2})_-]\Big)=\mathrm{res}\,\Big([L^{k/2},(L^{m/2})_-]\Big)$$

$$=\mathrm{res}\,\Big([(L^{m/2})_+,L^{k/2}]\Big)=\mathrm{res}\,(\partial_{t_m}L^{k/2})=\partial_{t_m}\mathrm{res}\,L^{k/2}$$

Здесь было использовано, что $\mathrm{res}\,\Big([(L^{k/2})_+,(L^{m/2})_+]\Big)=\mathrm{res}\,\Big([(L^{k/2})_-,(L^{m/2})_-]\Big)=0$. Кроме того, на втором шаге мы неявно предположили, что из уравнения Лакса для L следует уравнение Лакса для его полуцелых степеней. Строго говоря, это не самоочевидно и требует доказательства. Ясно, что достаточно проверить это для псевдодифференциального оператора $L^{1/2}$.

Лемма. Из уравнения Лакса $\partial_t L=[A,L]$ следует, что $\partial_t L^{1/2}=[A,L^{1/2}]$.

Обозначим для краткости $L^{1/2}=\mathcal{L}$, тогда из $\partial_t\mathcal{L}^2=[A,\mathcal{L}^2]$ после раскрытия коммутатора находим $(\dot{\mathcal{L}}-[A,\mathcal{L}])\mathcal{L}+\mathcal{L}(\dot{\mathcal{L}}-[A,\mathcal{L}])=0$, где производная по t обозначена точкой. Воспользовавшись тем же аргументом, что и выше (см. (1.8)), легко усмотреть, что оператор $\dot{\mathcal{L}}-[A,\mathcal{L}]:=P_-=p_1\partial^{-1}+p_2\partial^{-2}+\ldots$ содержит только отрицательные степени ∂. Поскольку $\mathcal{L}$ имеет вид $\mathcal{L}=\partial+O(\partial^{-1})$, из равенства $P_-\mathcal{L}+\mathcal{L}P_-=0$ следует, что $p_1=0$, т.е. что P_- на самом деле имеет вид $P_-=\tilde{P}_-\partial^{-1}$. Подставив его в таком виде в упомянутое равенство, получим $\tilde{P}_-\tilde{\mathcal{L}}+\mathcal{L}\tilde{P}_-=0$, где $\tilde{\mathcal{L}}=\partial^{-1}\mathcal{L}\partial=\partial+O(\partial^{-1})$, откуда точно так же следует, что $p_2=0$. Продолжая этот процесс, найдем, что все коэффициенты оператора $P_-=\dot{\mathcal{L}}-[A,\mathcal{L}]$ равны 0, т.е. $\dot{\mathcal{L}}=[A,\mathcal{L}]$, что и утверждается в лемме.

Тем самым уравнение КдФ имеет бесконечное множество *коммутирующих* симметрий, т.е. таких, что любые две симметрии из этого множества являются также симметриями друг для друга. Оказывается, уравнение КдФ имеет кроме них бесконечно много симметрий, которые этим свойством не обладают (так называемых дополнительных или неабелевых симметрий). О них будет рассказано далее.

1.2.3 Интегралы движения

Наличие бесконечного количества коммутирующих симметрий влечет за собой существование бесконечного набора интегралов движения (законов сохранения).

Утверждение. *Величины*

$$I_j=\int\mathrm{res}\,L^{j/2}\,dx \tag{1.9}$$

при $j\geq 1$ являются интегралами движения для всех уравнений иерархии КдФ.

(Очевидно, $I_{2l}=0$, так что нетривиальны только интегралы с нечетными номерами.) Доказательство основано на представлении Лакса:

$$\partial_{t_n} I_j = \int \mathrm{res}\,(\partial_{t_n} L^{j/2}) dx = \int \mathrm{res}\left([(L^{n/2})_+, L^{j/2}]\right) dx$$

Однако, $\mathrm{res}\,[P,Q]$ для любых двух псевдодифференциальных операторов P,Q является полной производной. В случае быстроубывающих или периодических решений получаем, следовательно, что $\partial_{t_n} I_j = 0$.

1.2.4 Коэффициенты Гельфанда-Дикого и их свойства

Плотности интегралов движения $R_j \equiv \mathrm{res}\, L^{j/2}$ называются коэффициентами Гельфанда-Дикого. Для них имеется простая рекуррентная формула. Чтобы ее вывести, напишем $(L^{j/2})_- = R_j\partial^{-1} + S_j\partial^{-2} + T_j\partial^{-3} + \ldots$, тогда

$$R_{j+2} = \mathrm{res}\, L^{\frac{j}{2}+1} = \mathrm{res}\left((\partial^2+u)L^{j/2}\right)$$

$$= \mathrm{res}\,(\partial^2(R_j\partial^{-1} + S_j\partial^{-2} + T_j\partial^{-3}) + uR_j\partial^{-1})$$

$$= R_j'' + uR_j + 2S_j' + T_j$$

Теперь вычислим

$$-[(L^{j/2})_-,\, L] = -[R_j\partial^{-1} + S_j\partial^{-2} + T_j\partial^{-3} + \ldots\,,\, \partial^2+u]$$

$$= 2R_j' + (R_j'' + 2S_j')\partial^{-1} + (u'R_j + S_j'' + 2T_j')\partial^{-2} + \ldots$$

и воспользуемся равенством (1.8), из которого видно, что оператор $[(L^{j/2})_-,\, L]$ не содержит отрицательных степеней ∂, т.е. имеют место тождества

$$R_j'' + 2S_j' = 0$$

$$u'R_j + S_j'' + 2T_j' = 0$$

Выражая из них S_j, T_j через R_j, из полученной выше формулы для R_{j+2} находим искомое рекуррентное соотношение:

$$4R_{j+2}' = R_j''' + 4uR_j' + 2u'R_j \tag{1.10}$$

Его можно переписать в виде

$$4R_{j+2}' = (\partial^2 + 4u + 2u'\partial^{-1})R_j' \tag{1.11}$$

или

$$4R_{j+2} = (\partial^2 + 2u + 2\partial^{-1}u\partial)R_j \tag{1.12}$$

Удобно начать с $j=-1$, положив $R_{-1}=1$. Рекуррентное соотношение связывает R_j с нечетными номерами; все R_{2l} равны 0. С помощью производящей функции

$$R(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} R_n z^{-n-2} = z^{-1} + R_1 z^{-3} + \ldots \tag{1.13}$$

рекуррентное соотношение запишется в виде дифференциального уравнения

$$R'''(z) + 4(u - z^2)R'(z) + 2u'R(z) = 0 \tag{1.14}$$

Задача. Доказать, что $R(z)$ удовлетворяет также следующему нелинейному дифференциальному уравнению:

$$2R(z)R''(z) - (R'(z))^2 + 4(u - z^2)R^2(z) + 4 = 0 \tag{1.15}$$

Замечание. Функция $R(z)$ имеет смысл диагонали ядра оператора $(\partial^2 + u - z^2)^{-1}$, т.е. $R(z) = R(z; x, x)$, где $R(z; x, x')$ – ядро резольвенты оператора $\partial^2 + u$. Тем самым производящую функцию интегралов движения $\int R(z)dx = \int R(z; x, x)dx$ надо понимать как $\mathrm{tr}\,(\partial^2 + u - z^2)^{-1}$, что находится в полном согласии с сохранением этой величины в силу уравнения Лакса.

Оператор $\Lambda = \partial^2 + 2u + 2\partial^{-1}u\partial$, стоящий справа в (1.12), называется рекурсионным. С его помощью можно разрешить рекуррентное соотношение, написав

$$R_{2j-1} = 2^{-2j}\Lambda^j \cdot 1\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.16}$$

Вот несколько первых R_j:

$$2R_1 = u$$

$$8R_3 = 3u^2 + u''$$

$$32R_5 = 10u^3 + 5u'^2 + 10uu'' + u''''$$

Напомним, что высшие уравнения КдФ имеют вид $\partial_{t_j} u = 2R_j'$.

Задача. Доказать, что

$$A_m = (L^{m/2})_+ = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left(R_{2j-1}\partial - \frac{1}{2}R'_{2j-1}\right) L^{\frac{m-1}{2}-j}\,, \quad m = 1, 3, 5 \ldots \tag{1.17}$$

(Подсказка: доказать сначала рекуррентое соотношение $A_{m+2} = A_m L + R_m\partial - \frac{1}{2}R'_m$.)

Коэффициенты R_j обладают важным свойством: для любых j, l произведение $R_j R_l'$ является полной производной, т.е. найдется дифференциальный полином $P_{j,l}$ такой, что

$$R_j R_l' = P'_{j,l} \tag{1.18}$$

Это можно доказать по индукции с помощью рекуррентного соотношения (1.10) А именно, предположим, что данное свойство имеет место при некотором (нечетном) j для всех l (например, это, очевидно, так при $j = -1$); тогда из рекуррентного соотношения следует, что оно имеет место для всех l и при следующем нечетном j.

Задача. Доказать свойство (1.18).

Это свойство, в частности, гарантирует, что оператор ∂^{-1} в (1.12) всегда применяется к полной производной от дифференциального полинома, а именно $u\partial R_j = 2R_1 R_j' = 2P'_{1,j}$, и потому результатом его действия является дифференциальный полином $2P_{1,j}$.

Между коэффициентами Гельфанда-Дикого имеется также рекуррентное соотношение другого типа:

$$\frac{\delta}{\delta u}\int R_m\,dx = \frac{m}{2}\,R_{m-2} \tag{1.19}$$

где слева стоит вариационная производная от m-го интеграла движения $I_m = \int R_m dx$. Оно сразу следует из того, что под знаком $\int$ res можно обращаться с вариацией оператора L, возведенного в степень $m/2$, как с вариацией обычной степенной функции:

$$\int \mathrm{res}\,(\delta(L^{\frac{m}{2}}))dx = \frac{m}{2}\int \mathrm{res}\,(L^{\frac{m-2}{2}}\,\delta L)dx$$

Поскольку $\delta L = \delta u$, соотношение (1.19) теперь очевидно.

Задача. Дать подробный вывод соотношения (1.19).

1.3 Гамильтонова формулировка

Соотношение (1.19) позволяет написать m-е уравнение иерархии КдФ в виде

$$\partial_{t_m} u = \frac{4}{m+2}\,\frac{d}{dx}\frac{\delta I_{m+2}}{\delta u} \tag{1.20}$$

Очевидно, это уравнение имеет стандартную гамильтонову форму $\partial_{t_m} u = \{u, H_m\}$ с гамильтонианом $H_m = \frac{4}{m+2}\,I_{m+2}$ и скобкой Пуассона, заданной на функционалах $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ от u следующим образом:

$$\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} = \int \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u}\,dx \tag{1.21}$$

Нетрудно убедиться, что интегралы движения I_m находятся в инволюции:

$$\{I_m, I_n\} = \int \frac{\delta I_m}{\delta u}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\delta I_n}{\delta u}\,dx = \frac{mn}{4}\int R_{m-2}R'_{n-2}dx = 0$$

в силу (1.18).

Задача. Проверить, что скобка (1.21) удовлетворяет тождеству Якоби.

Если в m-м уравнении иерархии КдФ $\partial_{t_m} u = 2\partial R_m$ сначала выразить R_m через R_{m-2} с помощью рекурсионного оператора ($4R_m = \Lambda R_{m-2}$), а потом воспользоваться соотношением (1.19), получится другая гамильтонова формулировка того же уравнения:

$$\partial_{t_m} u = \frac{1}{m}\,\frac{d}{dx}\,\Lambda\,\frac{\delta I_m}{\delta u}\,, \qquad \frac{d}{dx}\,\Lambda = \partial^3 + 4u\partial + 2u' \tag{1.22}$$

Теперь гамильтонианом является $\frac{1}{m}I_m$, а скобка Пуассона задана формулой

$$\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}_2 = \int \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}\,\frac{d}{dx}\,\Lambda\,\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u}\,dx \tag{1.23}$$

Легко проверить, что она антисимметрична, но доказательство тождества Якоби для нее менее тривиально, чем для скобки (1.21).

Скобка (1.21) (которую теперь естественно обозначить $\{\ ,\ \}_1$) и скобка (1.23) определяют соответственно *первую и вторую гамильтоновы структуры* иерархии

КдФ. Легко видеть, что интегралы движения I_m находятся в инволюции относительно обеих скобок. Можно также проверить, что эти скобки *согласованны*, т.е. любая их линейная комбинация $\{\ ,\ \}_1 + \lambda\{\ ,\ \}_2$ с постоянной λ тоже является скобкой Пуассона.

Можно показать, что имеется целая бесконечная иерархия согласованных друг с другом гамильтоновых структур. Соответствующие уравнения получаются из $\partial_{t_m} u = 2\partial R_m$ способом, аналогичным описанному выше: сначала надо выразить R_m в правой части через R_{m-2l} с помощью оператора Λ ($R_m = \frac{1}{4}\Lambda R_{m-2} = \frac{1}{16}\Lambda^2 R_{m-4}$ и т.д.), а затем представить R_{m-2l} в виде вариационной производной, воспользовавшись соотношением (1.19). Скобка Пуассона $\{\ ,\ \}_l$, соответствующая l-й гамильтоновой структуре, задается интегральной формулой типа (1.23) с оператором $\frac{d}{dx}\Lambda^{l-1}$.

Задача. Показать, что интегралы движения I_j находятся в инволюции относительно всех скобок Пуассона $\{\ ,\ \}_l$.

1.4 Вспомогательные линейные задачи и ψ-функция

1.4.1 Функция Бейкера-Ахиезера

Уравнение Лакса (1.3) является условием совместности переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений (вспомогательных линейных задач)

$$\begin{cases} L\psi = k^2\psi \\ \\ \partial_t\psi = A\psi \end{cases} \tag{1.24}$$

Совместность означает наличие большого запаса общих решений. Их можно искать в виде ряда по k:

$$\psi = e^{kx+k^3t}\left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + \dots\right) \tag{1.25}$$

где ξ_i зависят только от x (и от t) и выражаются через u подстановкой ряда для ψ в уравнение $(\partial^2+u)\psi = k^2\psi$. Например,

$$\begin{aligned} &2\xi_1' + u = 0 \\ \\ &2\xi_2' + \xi_1'' + \xi_1 u = 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

и т.д. (при $i \geq 2$ будем иметь рекуррентные соотношения $2\xi_i' + \xi_{i-1}'' + \xi_{i-1}u = 0$). Дифференцируя равенство $L\psi = k^2\psi$ по t, получим

$$\Big(\partial_t L + [L,\, A]\Big)\psi = 0$$

Поскольку это верно при любом k, оператор в левой части равен 0.

Аналогично, любое из высших КдФ является условием совместности линейных задач

$$\begin{cases} L\psi = k^2\psi \\ \\ \partial_{t_m}\psi = A_m\psi \end{cases} \tag{1.27}$$

с тем же оператором L и $A_m = (L^{m/2})_+$. Их общее решение в этом случае имеет вид

$$\psi = e^{kx+k^3t_3+k^5t_5+\dots}\left(1+\frac{\xi_1}{k}+\frac{\xi_2}{k^2}+\dots\right) \tag{1.28}$$

Пока это просто некоторый формальный ряд.

Функция ψ, рассматриваемая как функция "спектрального параметра" k, называется функцией Бейкера-Ахиезера. Она играет фундаментальную роль в теории уравнения КдФ (и других солитонных уравнений) и служит основным инструментом для построения точных решений. А именно, схема интегрирования уравнения КдФ будет заключаться в построении семейства решений для ψ, из которых u найдется по формуле $u = -2\partial_x\xi_1$.

Упражнение. Доказать, что $\partial_{t_n}\xi_1 = -R_n$, где R_n – коэффициент Гельфанда-Дикого.

1.4.2 Интегралы движения из ψ-функции

Функция Бейкера-Ахиезера позволяет также найти бесконечный набор интегралов движения.

Утверждение. *Функция*

$$\chi := \partial \log\psi - k = \sum_{j=1}^{\infty}\chi_j k^{-j} \tag{1.29}$$

является производящей функцией плотностей интегралов движения, т.е. $\partial_t\int\chi_j dx = 0$ *для всех* $j \geq 1$.

Действительно, функция χ удовлетворяет уравнению типа Рикатти

$$\chi^2 + \chi_x + 2k\chi + u = 0$$

откуда ее коэффициенты разложения можно выразить рекуррентным образом через u, u_x, u_{xx} и т.д., например: $\chi_1 = -\frac{1}{2}u$, $\chi_2 = \frac{1}{4}u_x$. С другой стороны,

$$\partial_t\chi = \partial\partial_t\log\psi = \partial\left(\frac{\partial_t\psi}{\psi}\right) = \partial\left(\frac{A\psi}{\psi}\right)$$

Но функция $A\psi/\psi$ выражается через χ, u и их производные по x (поскольку $\partial^3\psi/\psi$ выражается через χ и ее производные) . Следовательно, коэффициенты разложения этого выражения по k являются дифференциальными полиномами от u, и наличие в правой части равенства производной приводит к тому, что $\partial_t\int\chi dx = 0$ (для быстроубывающих или периодических u).

Отметим, что нетривиальные интегралы движения порождаются только χ_j с нечетными номерами. Все χ_{2n} являются полными производными. В самом деле, написав уравнения Рикатти для $\chi(\pm k)$ и вычтя их друг из друга, получим

$$(\chi(k)+\chi(-k))(\chi(k)-\chi(-k)) + (\chi(k)-\chi(-k))_x + 2k(\chi(k)+\chi(-k)) = 0$$

откуда $\chi(k)+\chi(-k) = -\partial\log\Big(\chi(k)-\chi(-k)+2k\Big)$ – полная производная.

Возникает вопрос, как связаны интегралы движения $\int \chi_j \, dx$ с интегралами движения I_j, заданными формулой (1.6). Пусть $\psi(k)$ – решение уравнения $(\partial^2 + u)\psi = k^2\psi$, тогда, очевидно, в качестве второго решения можно взять $\psi(-k)$, и их вронскиан

$$\psi(-k)\psi_x(k) - \psi(k)\psi_x(-k) := W(k) \tag{1.30}$$

не зависит от x. Деля обе части на $\psi(k)\psi(-k)$, получаем

$$2k + \chi(k) - \chi(-k) = \frac{W(k)}{\psi(k)\psi(-k)} \tag{1.31}$$

где в левой части стоит производящая функция плотностей нетривиальных интегралов движения χ_j (с нечетными номерами). Далее, нетрудно убедиться, что $\psi(z)\psi(-z)$ удовлетворяет тому же уравнению 3-го порядка (1.14), что и $R(z)$. Поскольку обе функции имеют одинаковую структуру разложения по обратным степеням z, они могут отличаться только не зависящим от x общим множителем, который можно найти, устремив x к ∞ (в предположении, что $u \to 0$ при $x \to \infty$). С учетом того, что $\chi(z)$ стремится к 0 при $x \to \infty$, из (1.31) следует, что $\psi(z)\psi(-z)$ стремится к $W(z)/(2z)$, и, следовательно,

$$R(z) = \frac{2\psi(z)\psi(-z)}{W(z)} \tag{1.32}$$

Тем самым производящие функции плотностей интегралов движения $\int \chi_j dx$ и I_j при нечетных j связаны соотношением

$$\left(k + \frac{\chi(k) - \chi(-k)}{2}\right) R(k) = 1.$$

Расписав формулу (1.32) покоэффициентно, будем иметь:

$$R_l = 2\,\mathrm{res}_{z=\infty} \left(\frac{z^{l+1}}{W(z)}\, \psi(z)\psi(-z) \right) \tag{1.33}$$

где вычет понимается в обычном смысле как коэффициент при степени z^{-1} в разложении правой части в ряд Лорана при $z \to \infty$. Отметим, что это равенство является следствием более общего соотношения

$$\left(L^{m/2}\right)_- = 2\,\mathrm{res}_{z=\infty} \left(\frac{z^{m+1}}{W(z)}\, \psi(z)\partial^{-1}\psi(-z) \right) \tag{1.34}$$

которое мы здесь не будем доказывать (оно следует из еще более общего соотношения, доказанного в разделе про иерархию Кадомцева-Петвиашвили).

1.4.3 Уравнение МКдФ

Наконец, укажем, как с помощью ψ-функции можно перейти от уравнения КдФ к так называемому модифицированному уравнению КдФ (МКдФ).

Положим $v = \partial \log \psi$, тогда уравнения $\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$ и $\psi_t = \psi_{xxx} + \frac{3}{2}u\psi_x + \frac{3}{4}u_x\psi$ (спектральный параметр здесь обозначен через λ) можно переписать в виде

$$u = \lambda - v^2 - v_x \tag{1.35}$$

и

$$v_t = \partial_x \left(\frac{\psi_{xxx} + \frac{3}{2}u\psi_x + \frac{3}{4}u_x\psi}{\psi} \right) \tag{1.36}$$

Соотношение (1.35) называется преобразованием Миуры (обычно с $\lambda = 0$). Пользуясь преобразованием Миуры и очевидными тождествами

$$\frac{\psi_{xx}}{\psi} = v_x + v^2\,, \qquad \frac{\psi_{xxx}}{\psi} = v_{xx} + 3vv_x + v^3$$

можно представить соотношение (1.36) как уравнение на v: $v_t = \frac{1}{4}\,\partial_x(v_{xx} - 2v^3 + 6\lambda v)$ или

$$4v_t = -6v^2 v_x + v_{xxx} + 6\lambda v_x \tag{1.37}$$

которое и называется уравнением МКдФ (обычно без последнего члена).

Упражнение. Пусть u и v связаны преобразованием Миуры (1.35). Показать, что

$$-(4u_t - 6uu_x - u_{xxx}) = (\partial_x + 2v)(4v_t + 6v^2 v_x - v_{xxx} - 6\lambda v_x) \tag{1.38}$$

1.5 Построение решений уравнения КдФ с помощью ψ-функции

1.5.1 Основная лемма

Сформулируем простую, но важную лемму технического характера, на которой будет основана процедура построения точных решений.

Лемма. *Для функции ψ вида (1.25) справедливы формальные равенства*

$$\begin{gathered}(\partial^2 - k^2 + u)\psi = O(k^{-1})e^{kx+k^3t} \\ (\partial_t + \tfrac{1}{2}\,\partial^3 - \tfrac{3}{2}\,k^2\partial + \tfrac{3}{4}\,u_x)\psi = O(k^{-1})e^{kx+k^3t}\end{gathered} \tag{1.39}$$

где функция $u = u(x,t)$ может быть найдена из условия обращения в нуль коэффициентов при неотрицательных степенях k: $u = -2\xi_{1,x}$.

Доказательство заключается в прямой проверке. Смысл и польза этого утверждения в том, что оно позволяет строить точные решения уравнения КдФ с помощью методов линейной алгебры. Предположим, что линейное пространство ψ-функций вида (1.25), определенное наложением каких-либо требований на аналитические свойства этих функций как функций комплексной переменной k, *одномерно* (т.е. с точностью до умножения на константу имеется только одна такая функция), а операторы, стоящие в левых частях формальных равенств, не выводят за пределы этого пространства. Тогда из вида правых частей сразу следует, что они равны нулю тождественно, а не только с точностью до членов $O(k^{-1})e^{kx+k^3t}$. Это в свою очередь означает, что функция ψ при всех k является общим решением пары линейных задач (1.24), из совместности которых вытекает, что функция $u = -2\partial\xi_1$ удовлетворяет уравнению КдФ.

1.5.2 Односолитонное решение

Начнем с простейшего примера. На расширенной комплексной плоскости переменной k рассмотрим пространство функций $\psi = \psi(k)$ мероморфных везде кроме бесконечности и таких, что:

а) функция ψe^{-kx-k^3t} регулярна в окрестности точки $k = \infty$;

б) ψ имеет единственный простой полюс в точке $k = 0$, а в остальном голоморфна везде кроме ∞;

в) в некоторой точке $p \in \mathbb{C}$ выполняется соотношение $\psi(p) = \psi(-p)$.

Переменные x, t и точка p рассматриваются здесь как фиксированные параметры. Очевидно, такие функции образуют линейное пространство над полем комплексных чисел. Легко видеть, что если параметры находятся в общем положении, размерность этого пространства равна 1, т. е. с точностью до умножения на константу имеется только одна такая функция. В самом деле, ψ, очевидно, имеет вид

$$\psi = e^{kx+k^3t}\left(b_0 + \frac{b_1}{k}\right)$$

с некоторыми b_0, b_1, но условие в) фиксирует отношение b_1/b_0, и в результате неопределенным остается только общий множитель.

Далее, нетрудно убедиться, что операторы в левых частях равенств (1.39) переводят определенное выше пространство функций в себя. Для этого надо проверить, что при любом выборе функции u

$$(\partial^2 - k^2 + u)\psi = O(1)e^{kx+k^3t}$$

$$(\partial_t + \tfrac{1}{2}\,\partial^3 - \tfrac{3}{2}\,k^2\partial + \tfrac{3}{4}\,u_x)\psi = O(1)e^{kx+k^3t}$$

и что значения левых частей при $k = p$ и $k = -p$ совпадают. Первое проверяется прямым вычислением, а второе очевидно из того, что k в левые части входит в квадрате. Тем самым в правых частях этих равенств стоят функции из того же линейного пространства; обозначим их ψ_1 и ψ_2. Согласно лемме, при $u = -2\xi_{1,x}$ правые части на самом деле имеют вид $O(1/k)e^{kx+k^3t}$. Это значит, что функции $\psi_1 e^{-kx-k^3t}$ и $\psi_2 e^{-kx-k^3t}$ обращаются в ноль на бесконечности. В силу единственности имеем тогда $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$, т. е.

$$(\partial^2 + u - k^2)\psi = 0$$

$$(\partial_t + \tfrac{1}{2}\,\partial^3 - \tfrac{3}{2}\,k^2\partial + \tfrac{3}{4}\,u_x)\psi = 0$$

Выразив $k^2\psi$ из первого равенства и подставив во второе, придем к паре линейных задач (1.24) вместе с явно построенным семейством общих решений. Их совместность гарантирует, что $u = -2\xi_{1,x}$ является решением уравнения КдФ.

Осталось найти односолитонное решение в явном виде. Для функции

$$\psi = e^{kx+k^3t}\left(1 + \frac{\xi_1}{k}\right)$$

условие $\psi(p) = \psi(-p)$ эквивалентно линейному уравнению $e^{2px+2p^3t}(p+\xi_1) = p - \xi_1$ на ξ_1, откуда $\xi_1 = -p\, \tanh(px + p^3t)$ и, следовательно,

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2p^2}{\cosh^2(px + p^3t)}} \tag{1.40}$$

Обратим внимание на то, что $\xi_1 = -\partial_x \log\cosh(px+p^3t)$, и тем самым формулу (1.40) можно записать в виде

$$u(x,t) = 2\partial_x^2 \log\cosh(px + p^3t)$$

Из сказанного выше ясно, что односолитонное решение всей иерархии КдФ дается такой же формулой, в которой под гиперболическим косинусом стоит $px + p^3t_3 + p^5t_5 + \ldots$

Замечание. Вместо функций с полюсом в 0 можно рассматривать функции с полюсом в произвольной точке $a \in \mathbb{C}$ и с более общим условием $\psi(p) = \alpha\psi(-p)$, где α – произвольная ненулевая константа.

Задача. Показать, что функция $\psi = e^{kx+k^3t}\left(1 + \frac{\xi_1}{k-a}\right)$ с условием $\psi(p) = \alpha\psi(-p)$ вновь приводит к односолитонному решению того же вида (1.40), отличающемуся только сдвигом переменной $x \to x + x_0$ (здесь x_0 – вообще говоря, комплексная величина) и выразить x_0 через a и α.

С точки зрения уравнения Шредингера с потенциалом $-u$, т. е. $-\partial^2\psi - u\psi = E\psi$, односолитонное решение замечательно тем, что соответствующая ему потенциальная яма имеется ровно одно связанное состояние с энергией $E = -p^2$, а состояния непрерывного спектра с энергией $E = -k^2$ при чисто мнимых k имеют нулевой коэффициент отражения и при прохождении через потенциальную яму приобретают только сдвиг фазы, равный $\arg\frac{k-p}{k+p}$.

1.5.3 Многосолитонные решения

Рассмотрим линейное пространство функций $\psi = \psi(k)$ мероморфных везде кроме бесконечности и таких, что:

а) функция ψe^{-kx-k^3t} регулярна в окрестности точки $k = \infty$;

б) ψ имеет не более N полюсов (с учетом кратностей) в заданных конечных точках комплексной плоскости, а в остальном голоморфна везде кроме ∞;

в) в N различных точках $p_j \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения $\psi(p_j) = \alpha_j\psi(-p_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда все полюса сосредоточены в точке $k = 0$, т. е. там имеется полюс кратности не более N, и других полюсов нет. Тогда ψ представима в виде

$$\psi = e^{kx+k^3t}\left(b_0 + \frac{b_1}{k} + \frac{b_2}{k^2} + \ldots + \frac{b_N}{k^N}\right)$$

Пространство таких функций, очевидно, $(N+1)$-мерно. Аналогично тому, как это было в случае одного полюса, N линейных условий $\psi(p_j) = \alpha_j \psi(-p_j)$ на коэффициенты b_j превращают его в одномерное пространство, а операторы в левых частях равенств (1.39) переводят это пространство в себя. Поэтому, если нормировать ψ условием, что коэффициент при k^0 равен 1, как в (1.25),

$$\psi = e^{kx+k^3t}\left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + \ldots + \frac{\xi_N}{k^N}\right),$$

то $u = -2\xi_{1,x}$ является решением уравнения КдФ.

Найдем это решение в явном виде. Условия $\psi(p_j) = \alpha_j \psi(-p_j)$ эквивалентны следующей системе линейных уравнений на ξ_j:

$$\sum_{j=1}^{N} M_{ij}\,\xi_j = -M_{i0}$$

где M_{ij} имеет вид $M_{ij} = p_i^{-j} e^{p_i x + p_i^3 t} - \alpha_i (-p_i)^{-j} e^{-p_i x - p_i^3 t}$. Правило Крамера дает

$$\xi_1 = -\frac{\det M_{ij}^{(0)}}{\det M_{ij}}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N$$

где матрица $M_{ij}^{(0)}$ отличается от M_{ij} заменой первого столбца M_{i1} на M_{i0} (i – номер строки). Поскольку $\partial_x M_{ij} = M_{i,j-1}$, имеем $\det M_{ij}^{(0)} = \partial_x \det M_{ij}$, и $\xi_1 = -\partial_x \log\det M_{ij}$, так что $u = 2\partial_x^2 \log\det M_{ij}$. Итак, мы получили семейство решений

$$\boxed{u = 2\partial_x^2 \log\tau} \tag{1.41}$$

где

$$\tau = \det_{1\le i,j\le N}\left(p_i^{-j} e^{p_i x + p_i^3 t} - \alpha_i(-p_i)^{-j} e^{-p_i x - p_i^3 t}\right) \tag{1.42}$$

Решение всей иерархии дается такой же формулой, надо только вместо $p_i x + p_i^3 t$ подставить $p_i x + p_i^3 t_3 + p_i^5 t_5 + \ldots$ При этом все α_i можно "спрятать" в подходящим образом выбранные начальные значения времен t_j, так что с точки зрения всей иерархии параметрами решения являются только p_i.

Построенное решение называется N-солитонным, а p_i называются импульсами солитонов. Функция $\tau = \tau(x, t_3, t_5, \ldots)$ называется *τ-функцией.* Она играет фундаментальную роль в теории как уравнения КдФ, так и всех остальных интегрируемых уравнений. Оказывается, любое точное решение иерархии КдФ (не только N-солитонное) можно представить как удвоенную вторую логарифмическую производную от детерминанта некоторой матрицы или оператора (в общем случае бесконечномерного). Этот детерминант и является τ-функцией.

Поскольку решение выражается через вторую логарифмическую производную от τ, τ-функции, отличающиеся только фактором вида Ce^{ax} с не зависящими от x C и a считаются эквивалентными.

Можно показать, что потенциалы в уравнении Шредингера, соответствующие N-солитонным решениям с вещественными p_i, являются безотражательными и имеют ровно N связанных состояний с энергиями $E_i = -p_i^2$. В квантовомеханической интерпретации условия $\psi(p_j) = \alpha_j \psi(-p_j)$ означают, что в точках дискретного спектра имеется только одна линейно независимая собственная функция оператора Шредингера.

Задача. Найти сдвиг фазы волновой функции при рассеянии на потенциале, соответствующем 2-солитонному решению.

Укажем еще две полезные формы записи солитонной τ-функции. Первая из них тоже представляет собой детерминант матрицы $N \times N$:

$$\tau = \det_{1 \le i,j \le N} \left(\delta_{ij} + \frac{2\beta_i p_i}{p_i + p_j} \, e^{2p_i x + 2p_i^3 t_3 + 2p_i^5 t_5 + \ldots} \right) \tag{1.43}$$

Здесь β_i – некоторые параметры, аналогичные α_i, которые тоже могут быть устранены подходящим сдвигом времен.

Задача. Доказать эквивалентность детерминантных представлений (1.42) и (1.43).

Раскрыв детерминант (1.43), получим следующую формулу:

$$\tau = \sum_{\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N\} \in \mathbb{Z}_2^N} \; \prod_{i<j}^{N} \left(\frac{p_i - p_j}{p_i + p_j} \right)^{2\epsilon_i \epsilon_j} \prod_{k=1}^{N} \left(\beta_k e^{2p_k x + 2p_k^3 t_3 + \ldots} \right)^{\epsilon_k} \tag{1.44}$$

Здесь суммирование ведется по всем наборам из N чисел ϵ_i, принимающих значения $0, 1$, так что сумма содержит 2^N членов. Например, при $N = 2$ имеем:

$$\tau = 1 + \beta_1 e^{2p_1 x} + \beta_2 e^{2p_2 x} + \beta_1 \beta_2 \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 e^{2(p_1 + p_2)x}$$

где для простоты в показателях экспонент выписаны только члены с x.

С симметрийной точки зрения многосолитонные решения замечательны тем, что они являются стационарными точками для высших коммутирующих симметрий.

Утверждение. *Любое N-солитонное решение удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (высшему стационарному КдФ)*

$$\sum_i c_i R_i[u] = 0 \tag{1.45}$$

при некотором выборе констант c_i.

Например, односолитонное решение (1.40) удовлетворяет уравнению $R_3 - p^2 R_1 = 0$ или $3u^2 + u_{xx} - 4p^2 u = 0$, что очевидно из того факта, что решение зависит от комбинации $x + p^2 t$, и, следовательно, $u_t = p^2 u_x$. Общее доказательство можно провести с помощью явных формул (1.41), (1.42), заметив, что в быстроубывающем случае уравнение (1.45) эквивалентно $\sum_i c_i \partial_{t_i} \tau = 0$. При этом удобно воспользоваться выражением для τ (1.44), которое получается в результате раскрытия детерминанта.

Замечание. Уравнения (1.45), называемые еще уравнениями Новикова, кроме быстроубывающих решений солитонного типа имеют целое семейство периодических и квазипериодических решений, которые замечательны тем, что соответствующие операторы Шредингера имеют лишь конечное число запрещенных зон в спектре. Эти решения выражаются через θ-функции Римана, построенные по матрицам периодов гиперэллиптических римановых поверхностей.

1.6 Коммутационное представление иерархии КдФ в матрицах 2×2

Наряду с представлением уравнений иерархии КдФ как условий коммутации дифференциальных операторов, имеется альтернативное коммутационное представление той же иерархии, которое реализуется в обычных числовых матрицах 2×2, зависящих от некоторого дополнительного параметра (он называется спектральным параметром). Оно не требует явного использования техники псевдодифференциальных операторов и в ряде случаев оказывается более удобным.

1.6.1 Представление нулевой кривизны

Уравнение $(\partial^2 + u)\psi = z^2\psi$ можно переписать как векторное уравнение первого порядка

$$\partial\Psi = U_1(\lambda)\Psi \tag{1.46}$$

где $\lambda = z^2$ – спектральный параметр,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad U_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - u & 0 \end{pmatrix}$$

и $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \psi' = \partial\psi$. Чтобы найти аналогичное представление для уравнения $\partial_{t_m}\psi = A_m\psi$, воспользуемся формулой (1.17) и напишем:

$$\partial_{t_m}\psi = A_m\psi = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left(R_{2j-1}\partial - \frac{1}{2}R'_{2j-1}\right)\lambda^{\frac{m-1}{2}-j}\psi = -\frac{1}{2}R'_{m-2}(\lambda)\psi + R_{m-2}(\lambda)\psi'$$

где введено стандартное обозначение

$$R_m(\lambda) := \sum_{j=0}^{\frac{m+1}{2}} R_{2j-1}\lambda^{\frac{m+1}{2}-j}, \quad m = -1, 1, 3, \ldots$$

для "неполных производящих функций" коэффициентов Гельфанда-Дикого. Например,

$$R_{-1}(\lambda) = 1$$

$$R_1(\lambda) = \lambda + R_1$$

$$R_3(\lambda) = \lambda^2 + \lambda R_1 + R_3 \quad \text{и т. д.}$$

Рекуррентное соотношение имеет вид $R_{m+2}(\lambda) = \lambda R_m(\lambda) + R_{m+2}$. Легко также найти, что

$$\partial_{t_m}\psi' = \left[(\lambda - u)R_{m-2}(\lambda) - \frac{1}{2}R''_{m-2}(\lambda)\right]\psi + \frac{1}{2}R'_{m-2}(\lambda)\psi'$$

Объединив эту формулу с найденной выше формулой для $\partial_{t_m}\psi$, можно записать уравнение $\partial_{t_m}\psi = A_m\psi$ в векторном виде, аналогичном (1.46):

$$\partial_{t_m}\Psi = U_m(\lambda)\Psi \tag{1.47}$$

где

$$U_m(\lambda)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R'_{m-2}(\lambda) & R_{m-2}(\lambda) \\ \\ (\lambda-u)R_{m-2}(\lambda)-\frac{1}{2}R''_{m-2}(\lambda) & \frac{1}{2}R'_{m-2}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Обратим внимание на то, что при $m=1$ это уравнение совпадает с (1.46). При $m=3$ имеем

$$U_3(\lambda)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -u' & 4\lambda+2u \\ \\ 4\lambda^2-2\lambda u-(2u^2+u'') & u' \end{pmatrix}$$

В общем случае $U_m(\lambda)$ является матричным полиномом от λ степени $\frac{1}{2}(m+1)$. Тем самым мы переписали все вспомогательные линейные задачи как векторные уравнения первого порядка.

Условие совместности линейных задач (1.46) и (1.47) можно записать в виде $[\partial_{t_m}-U_m(\lambda),\,\partial_{t_1}-U_1(\lambda)]=0$ или

$$\partial_{t_m}U_1(\lambda)-\partial_{t_1}U_m(\lambda)+[U_1(\lambda),U_m(\lambda)]=0 \tag{1.48}$$

при всех λ, что дает m-е уравнение иерархии КдФ.

Упражнение. Проверить это утверждение прямым вычислением.

Представление иерархии КдФ в виде (1.48) называется представлением нулевой кривизны или Захарова-Шабата. Отметим, что справедливы также и более общие соотношения того же типа

$$\partial_{t_m}U_n(\lambda)-\partial_{t_n}U_m(\lambda)+[U_n(\lambda),U_m(\lambda)]=0 \tag{1.49}$$

для всех $m,n\geq 1$.

1.6.2 Представление нулевой кривизны, другая калибровка

Линейные задачи (1.47) можно, очевидно, подвергнуть "калибровочному преобразованию" $\Psi\to W\Psi$, $U_m(\lambda)\to WU_m(\lambda)W^{-1}$, где матрица W не зависит от всех t_k (но может зависеть от λ). Такое преобразование эквивалентно тому, что при переходе от уравнения второго порядка $(\partial^2+u)\psi=z^2\psi$ к векторному уравнению первого порядка в качестве компонент вектора Ψ выбираются не ψ и ψ', а какие-то их линейные комбинации с коэффициентами, которые могут зависеть от z.

Например, рассмотрим такой выбор: $\tilde\psi_1=\psi$, $\tilde\psi_2=\psi'-z\psi$. Новый вектор $\tilde\Psi$ связан с вектором Ψ следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\psi_1\\ \tilde\psi_2\end{pmatrix}$$

Тогда линейные задачи запишутся в виде

$$\partial_{t_m}\tilde\Psi=\tilde U_m(z)\tilde\Psi\,, \quad m=1,3,\ldots \tag{1.50}$$

где z играет роль спектрального параметра, и

$$\tilde U_m(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -z & 1\end{pmatrix}U_m(z^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}$$

являются матричными полиномами степени m от z:

$$\tilde{U}_m(z) = \begin{pmatrix} zR_{m-2}(z^2) - \frac{1}{2}R'_{m-2}(z^2) & R_{m-2}(z^2) \\ \\ zR'_{m-2}(z^2) - uR_{m-2}(z^2) - \frac{1}{2}R''_{m-2}(z^2) & -zR_{m-2}(z^2) + \frac{1}{2}R'_{m-2}(z^2) \end{pmatrix}$$

Приведем явный вид первых двух матриц:

$$\tilde{U}_1(z) = \begin{pmatrix} z & 1 \\ -u & -z \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

$$\tilde{U}_3(z) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4z^3 + 2uz - u' & 4z^2 + 2u \\ \\ -4uz^2 + 2u'z - (2u^2 + u'') & -4z^3 - 2uz + u' \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

Полученное коммутационное представление подсказывает возможное обобщение теории КдФ на другие эволюционные уравнения: интегрируемое уравнение должно быть условием совместности линейных задач вида (1.50) с некоторыми матрицами $V_j(z)$, рационально зависящими от спектрального параметра z. В частности, минимальное обобщение теории КдФ достигается выбором

$$V_1(z) = \begin{pmatrix} z & v \\ -u & -z \end{pmatrix}$$

где u, v – некоторые функции, входящие в искомое интегрируемое уравнение (при $v = 1$ мы возвращаемся к теории КдФ). При этом вид остальных матриц должен подбираться из условия, чтобы соответствующее уравнение нулевой кривизны сводилось к некоторым эволюционным уравнениям в частных производных на функции u и v. Так получаются модифицированное уравнение КдФ (МКдФ), нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), уравнение синус-Гордон (СГ) и другие.

1.6.3 Спектральная кривая

Польза представления нулевой кривизны видна, например, в случае, когда решение является стационарным относительно какого-либо из высших потоков или их комбинации. Пусть, к примеру, $\partial_t u := \sum\limits_m c_m \partial_{t_m} u = 0$ с некоторыми константами c_m, тогда $\partial_t \Psi = U(\lambda)\Psi$ с матрицей $U(\lambda) = \sum\limits_m c_m U_m(\lambda)$. Взяв линейную комбинацию уравнений (1.49) с коэффициентами c_m и учтя, что $\partial_t U_n(\lambda) = 0$, получим уравнение типа Лакса для $U(\lambda)$:

$$\partial_{t_n} U(\lambda) = [U_n(\lambda), U(\lambda)] \tag{1.53}$$

Из него следует, что характеристический полином матрицы $U(\lambda)$ при всех λ не зависит от времен t_n. Иными словами, алгебраическая кривая, заданная уравнением $\det(\mu + U(\lambda)) = 0$, является интегралом движения для всех уравнений иерархии. Эта кривая называется спектральной кривой, поскольку она тесно связана со спектром оператора Шредингера $\partial^2 + u$. Так как $\operatorname{tr} U(\lambda) = 0$, уравнение спектральной кривой имеет вид $\mu^2 + \det U(\lambda) = 0$. Например, при $U(\lambda) = U_3(\lambda)$ получим эллиптическую кривую

$$\mu^2 = \lambda^3 - \frac{3u^2 + u''}{4}\lambda - \frac{4u^3 - u'^2 + 2uu''}{16}$$

Задача. Путем прямой проверки убедиться в том, что эта спектральная кривая – интеграл движения для всех уравнений иерархии, т.е. что $\partial_{t_k}(3u^2+u'') = \partial_{t_k}(4u^3 - u'^2 + 2uu'') = 0$ для всех t_k.

В общем случае $U(\lambda) = c_m U_m(\lambda) + c_{m-2} U_{m-2}(\lambda) + \ldots + c_1 U_1(\lambda)$, $c_m \neq 0$, возникает гиперэллиптическая кривая $\mu^2 = P_m(\lambda)$, причем полином $P_m(\lambda)$ имеет степень m.

1.7 Неабелевы симметрии

1.7.1 Преобразование Галилея и преобразование подобия

Начнем с совсем простого утверждения.

Утверждение. *Уравнение КдФ сохраняет свой вид при преобразованиях*

$$\begin{cases} u \to \ \lambda^{-2}u - 2a\lambda^{-1} \\ x \to \ \lambda x + 3a\lambda^2 t \\ t \to \ \lambda^3 t \end{cases} \tag{1.54}$$

с произвольными постоянными λ, a.

Другими словами, если $u(x,t)$ удовлетворяет уранению КдФ (1.2), то величина $\tilde{u}$, определенная как функция от $\tilde{x}, \tilde{t}$ равенствами

$$\begin{cases} \tilde{u} = \ \lambda^{-2}u - 2a\lambda^{-1} \\ \tilde{x} = \ \lambda x + 3a\lambda^2 t \\ \tilde{t} = \ \lambda^3 t \end{cases}$$

удовлетворяет такому же уравнению $4\tilde{u}_{\tilde{t}} = 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}$. Еще проще можно сказать, что преобразование

$$u(x,t) \to \ \lambda^{-2}u\left(\lambda^{-1}x - 3a\lambda^{-2}t,\ \lambda^{-3}t\right) - 2a\lambda^{-1}$$

переводит решение в решение. Проверка этого проводится прямой подстановкой.

Преобразование с $\lambda = 1$, $a \neq 0$, т. е.

$$u(x,t) \to \ u(x - 3at,\ t) - 2a$$

называется преобразованием Галилея, а с $\lambda \neq 1$, $a = 0$, т. е.

$$u(x,t) \to \ \lambda^{-2}u\left(\lambda^{-1}x,\ \lambda^{-3}t\right)$$

– преобразованием подобия. Например, односолитонное решение (1.40) при преобразовании Галилея переходит в

$$u = \frac{2p^2}{\cosh^2(px + (p^3 - 3ap)t)} - 2a$$

а при преобразовании подобия в

$$u = \frac{2(p/\lambda)^2}{\cosh^2((p/\lambda)x + (p/\lambda)^3 t)}$$

Во втором случае преобразование сохраняет вид солитонного решения и сводится просто к замене $p \to p/\lambda$.

В инфинитезимальной форме преобразования Галилея и подобия имеют соответственно вид

$$u \to u + \left(\tfrac{3}{2} t u_x + 1\right) \varepsilon$$

$$u \to u + (3 t u_t + x u_x + 2u)\, \varepsilon$$

где ε – бесконечно малый параметр преобразования. Введя соответствующие "времена" s_{-1} и s_1, мы можем записать инфинитезимальные преобразования в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s_{-1}} &= \frac{3}{2}\, t u_x + 1 \\ \frac{\partial u}{\partial s_1} &= \frac{3}{4}\, t\,(6 u u_x + u_{xxx}) + x u_x + 2u \end{aligned} \tag{1.55}$$

которые в силу сказанного выше представляют собой симметрии уравнения КдФ в смысле, указанном в начале раздела 1.2. Этот факт можно проверить и непосредственно, вычислив и сравнив перекрестные производные $\partial_{s_i}(\partial_t u)$ и $\partial_t(\partial_{s_i} u)$ для $i = -1, 1$. Однако, уравнения (1.55) не являются симметриями друг для друга: перекрестные производные $\partial_{s_{-1}}(\partial_{s_1} u)$ и $\partial_{s_1}(\partial_{s_{-1}} u)$ не равны.

Упражнение. Вычислить $\partial_{s_{-1}}(\partial_{s_1} u) - \partial_{s_1}(\partial_{s_{-1}} u)$.

Отличие от рассмотренных ранее коммутирующих симметрий в том, что правые части уравнений (1.55) не являются дифференциальными полиномами от u, а содержат x, t в явном виде.

1.7.2 Бесконечная серия неабелевых симметрий

Оказывается, уравнение КдФ обладает целой бесконечной серией неабелевых симметрий. Их можно компактно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial s_m} = 2^{-\frac{m+1}{2}} \partial_x \Lambda^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{3}{2}\, t u + x\right), \quad m = -1, 1, 3, \ldots \tag{1.56}$$

где $\Lambda = \partial^2 + 2u + 2\partial^{-1} u \partial$ – рекурсионный оператор. Нетрудно проверить, что первые две симметрии совпадают с (1.55). Остальные не имеют такого простого вида. Отметим еще, что неабелевы симметрии (1.56) можно расширить до симметрий всей иерархии, если вместо выражения $\frac{3}{2} t u + x$ в правой части подставить

$$S := \sum_{n \geq 1} n t_n R_{n-2} = x + 3 t_3 R_1 + 5 t_5 R_3 + \ldots$$

1.7.3 Стационарные точки неабелевых симметрий: примеры

Интересно найти решения, являющиеся стационарными точками неабелевых симметрий. Например, решение, инвариантное относительно преобразования Галилея при всех t_j начиная с t_5 равных 0, должно удовлетворять условию $\partial u/\partial s_{-1} = \frac{3}{2}\, tu_x + 1 = 0$, откуда

$$u(x,t) = -\frac{2x}{3t} \tag{1.57}$$

Пожалуй, это простейшее решение уравнения КдФ, не постоянное по каждой из переменных. Если же положить все высшие времена равными 0 начиная с t_7, а $t_5 \neq 0$ (удобно выбрать $t_5 = 2/5$), то условие стационарности $\partial u/\partial s_{-1} = 0$ примет вид $3u^2 + u_{xx} + 6tu + 4x = 0$. Как и в предыдущем примере, стационарность относительно симметрии гарантирует, что функция u, неявно заданная этим соотношением как функция от x, t, удовлетворяет уравнению КдФ. В данном случае, однако, эти решения не выражаются через элементарные функции. Лучшее, что можно сделать, – это выразить их через решения уравнения Пенлеве I. Пусть $f(x)$ удовлетворяет Пенлеве I

$$3f^2 + f_{xx} + 4x = 0,$$

тогда легко видеть, что

$$u(x,t) = f\left(x - \frac{3}{4}\, t^2\right) - t$$

удовлетворяет условию стационарности, а, значит, и уравнению КдФ. Отметим, что уравнение Пенлеве I (точнее, производную по x от него) можно представить в виде коммутационного соотношения $[L, A] = 1$. Это так называемое “струнное уравнение”, ставшее популярным в начале 90-х годов прошлого века в связи с попытками построить теорию двумерной квантовой гравитации с помощью моделей случайных матриц.

1.7.4 Отступление об уравнениях Пенлеве

Появление уравнения Пенлеве I в связи с уравнением КдФ иллюстрирует весьма общий факт: обыкновенные дифференциальные уравнения, которые получаются как редукции интегрируемых уравнений в частных производных, тоже обладают определенными “хорошими” свойствами, выделяющими их из всех прочих, хотя и далеко не всегда могут быть явно проинтегрированы. А именно, для них имеет место так называемое свойство Пенлеве.

Чтобы его сформулировать, полезно ввести понятие критической особой точки решения обыкновенного дифференциального уравнения: особая точка решения называется критической, если она не является полюсом какого-нибудь произвольного (целого) порядка. Иными словами, критические особенности – это точки ветвления (алгебраические и логарифмические) и существенно особые точки. Если рассматривать всю совокупность решений некоторого дифференциального уравнения, их критические точки можно разделить на два типа: такие, положение которых зависит только от самого уравнения и не зависит от выбора решения *(неподвижные)* и такие, положение которых зависит от постоянных интегрирования *(подвижные)*.

Говорят, что уравнение обладает свойством Пенлеве, если все его решения имеют только неподвижные критические точки.

Как следует из теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, все линейные уравнения обладают свойством Пенлеве.

Простые примеры показывают, что нелинейные уравнения могут как обладать, так и не обладать свойством Пенлеве ($y' = y^2$ и $y' = y^3$ соответственно). Для уравнений первого и второго порядка, линейных по старшей производной, известны все уравнения, обладающие свойством Пенлеве.

Для уравнений первого порядка вида $y' = F(y, x)$ ответ достаточно простой (Фукс, 1884): только обобщенные уравнения Рикатти

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$$

не имеют подвижных критических точек.

Для уравнений второго порядка вида $y'' = G(y, y', x)$ ответ был получен в начале 20 века в работах Пенлеве, Фукса и Гамбье. Оказывается, имеется 50 уравнений такого вида, обладающих свойством отсутствия подвижных критических точек. Их можно привести либо к уравнениям, интегрируемым в известных элементарных или специальных функциях, либо к одному из 6 канонических уравнений, интегрирование которых в известных функциях, вообще говоря, невозможно. Эти шесть уравнений и называются сейчас уравнениями Пенлеве:

$$\mathrm{P_I}: \qquad y'' = 6y^2 + x$$

$$\mathrm{P_{II}}: \qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha$$

$$\mathrm{P_{III}}: \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + x^{-1}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

$$\mathrm{P_{IV}}: \qquad y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}$$

$$\mathrm{P_V}: \qquad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{y(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma x}{(y-1)^2} + \frac{\delta x^2(y+1)}{(y-1)^3}\right)$$

$$\mathrm{P_{VI}}: \qquad y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{y-x)^2}\right)$$

Их изучению и анализу свойств решений посвящена огромная литература, количество которой все увеличивается, поскольку в теории уравнений Пенлеве по сей день имеется много открытых вопросов. Кроме того, уравнения Пенлеве, как и многие фундаментальные вещи, имеют свойство появляться в самых неожиданных контекстах.

В контексте теории интегрируемых уравнений в частных производных уравнения Пенлеве возникают как автомодельные одномерные редукции двумерных уравнений.

2 Иерархия КП

Теория уравнения КдФ допускает обобщения в разных направлениях. Одно из них заключается в том, чтобы в качестве оператора Лакса взять дифференциальный оператор не 2-го, а N-го порядка. Например, при $N = 3$ можно рассмотреть оператор $L = \partial^3 + u\partial + w$ с двумя независимыми коэффициентами u, w, которые, как и раньше, зависят от x и от набора времен t_j, причем динамика по ним задается уравнениями Лакса $\partial_{t_j} L = [(L^{j/3})_+,\, L]$. Можно показать, что каждое из уравнений Лакса задает корректно определенную систему эволюционных уравнений на функции u, w, и полученные таким образом уравнения при различных t_j являются симметриями друг для друга, образуя бесконечную иерархию. Аналогично дело обстоит при произвольном $N > 2$ с той лишь разницей, что генераторами потоков служат $(L^{j/N})_+$, и уравнения пишутся на $N - 1$ независимую функцию. Все эти иерархии (так называемые обобщенные иерархии типа КдФ порядка N) можно погрузить в одну, в некотором смысле "самую большую", определение которой уже не зависит от числа N. Она называется иерархией Кадомцева-Петвиашвили (КП).

Чтобы такое погружение стало возможным и естественным, необходимо "уравнять в правах" операторы Лакса при разных N, т. е. представить их как элементы какой-то одной, общей для всех алгебры. Идея, как это сделать, предложенная и развитая в основном в работах японской школы (М.Сато, М.Джимбо, Т.Мива и др.) состоит в том, чтобы работать не с самими операторами Лакса, а с корнями N-й степени из них. Все они являются псевдодифференциальными операторами первого порядка и удовлетворяют тем же уравнениям Лакса, что и исходные дифференциальные операторы. После этого можно забыть об их происхождении и распространить уравнения Лакса на псевдодифференциальные операторы первого порядка общего вида.

2.1 Уравнения Лакса

Под оператором Лакса с этого момента будет пониматься *псевдодифференциальный оператор* вида

$$L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \dots \tag{2.1}$$

в котором коэффициенты u_i – вообще говоря, независимые функции от x и от набора времен t_j с целым $j \geq 1$. На оператор L накладываются уравнения Лакса

$$\partial_{t_j} L = [(L^j)_+,\, L]\,, \qquad j = 1, 2, 3, \dots \tag{2.2}$$

Каждое из них задает бесконечную систему эволюционых уравнений на бесконечный набор функций u_i вида $\partial_{t_j} u_i = \mathcal{P}_{ij}(\{u_l\})$, где $\mathcal{P}_{ij}(\{u_l\})$ – дифференциальные полиномы от u_l. Например, приравняв коэффициенты при ∂^{-1} в обеих частях, получим уравнения

$$\partial_{t_j} u_1 = \partial_x \operatorname{res} L^j \tag{2.3}$$

похожие в этой форме на уравнения иерархии КдФ, но в отличие от них не замкнутые, поскольку в правую часть входят также функции u_2, u_3 и т. д. Замкнутая система включает в себя уравнения для $\partial_{t_j} u_2$, $\partial_{t_j} u_3$ и т. д., которые получаются из сравнения коэффициентов при старших степенях оператора ∂^{-1} и имеют более сложную структуру.

Уравнение Лакса при $j = 1$ гласит, что $\partial_{t_1} L = [\partial, L]$, или $\partial_{t_1} u_i = \partial_x u_i$, что позволяет отождествить t_1 с x. Иными словами, эволюция по первому времени просто сдвигает аргумент x: $u_i(x) \to u_i(x + t_1)$.

Замечание. Иерархия КдФ получается при наложении условия, что L^2 является чисто дифференциальным оператором, т. е. не содержит отрицательных степеней ∂: $(L^2)_- = 0$ или $(L^2)_+ = L^2$ (в разделе про КдФ именно этот дифференциальный оператор L^2 обозначался как L и назывался оператором Лакса). Это условие приводит к тому, что среди всех функций u_i остается только одна независимая, в качестве которой берется $u = 2u_1$, а все остальные u_i с $i \geq 2$ выражаются как дифференциальные полиномы от u. Поскольку $(L^{2m})_+ = L^{2m}$ при всех целых положительных m, все потоки с четными номерами в этом случае тривиальны.

2.2 Представление нулевой кривизны

Имеется другое, эквивалентное представление иерархии КП, в котором псевдодифференциальный оператор Лакса в явном виде не участвует, а участвуют только дифференциальные операторы $(L^j)_+$. Для краткости введем обозначение $A_j = (L^j)_+$. Например, $A_1 = \partial$, $A_2 = \partial^2 + 2u_1$.

Упражнение. Найти $A_3 = (L^3)_+$.

Утверждение. *Из уравнений Лакса (2.2) следуют уравнения*

$$\partial_{t_m} A_n - \partial_{t_n} A_m - [A_m, A_n] = 0 \tag{2.4}$$

для всех $m, n \geq 1$.

Для доказательства сначала заметим, что в силу уравнений Лакса $\partial_{t_m} L^n = [A_m, L^n]$ для всех n, и тогда

$$\begin{aligned}
& \partial_{t_m}(L^n)_+ - \partial_{t_n}(L^m)_+ - [A_m, A_n] \\
= & \Big(\partial_{t_m} L^n - \partial_{t_n} L^m - [A_m, A_n]\Big)_+ \\
= & \Big([A_m, L^n] - [A_n, L^m] - [A_m, A_n]\Big)_+ \\
= & \Big([A_m,\, L^n - A_n] - [A_n, L^m]\Big)_+ \\
= & \Big([(L^m)_+, (L^n)_-] - [(L^n)_+, L^m]\Big)_+ \\
= & \Big([L^m, (L^n)_-] + [L^m, (L^n)_+]\Big)_+ \;=\; \Big([L^m, L^n]\Big)_+ \;=\; 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Верно и обратное утверждение – из всей совокупности уравнений (2.4) следуют уравнения Лакса. Очевидно, уравнение (2.4) эквивалентно коммутационному соотношению $[\partial_{t_m} - A_m,\, \partial_{t_n} - A_n] = 0$.

Упражнение. Проверить, что уравнения (2.4) можно переписать в виде

$$\partial_{t_m}(L^n)_- - \partial_{t_n}(L^m)_- + [(L^m)_-,\, (L^n)_-] = 0 \tag{2.6}$$

Представление иерархии КП в виде (2.4) или (2.6) по аналогии с (1.49) называется представлением нулевой кривизны или Захарова-Шабата. Каждое из уравнений нулевой кривизны порождает замкнутую систему из конечного числа дифференциальных уравнений на конечное число неизвестных функций, которая, однако, не представляется в эволюционном виде и содержит производные не по двум, а по трем временам: $x = t_1$, t_m, t_n. (В отличие от матричного уравнения нулевой кривизны (1.48), уравнения (2.4) при $n = 1$ представляют собой тождества, и поэтому в нетривиальных уравнениях будут участвовать три времени, а не два.) Если $n > m$, получается система из $n-1$ уравнения на неизвестные функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Именно про эти системы обычно говорят как про уравнения иерархии КП.

Простейший нетривиальный пример соответствует выбору $m = 2$, $n = 3$. Обозначив $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t$, $u = 2u_1$, $w = u_2$, получим из (2.4) систему уравнений

$$\begin{cases} u_y = u_{xx} + 4w_x \\[2ex] u_{xy} - \frac{2}{3}u_t + 2w_y = \frac{1}{3}u_{xxx} - uu_x + 2w_{xx} \end{cases}$$

Отсюда можно исключить w и получить замкнутое уравнение на u:

$$3u_{yy} = \Big(4u_t - 6uu_x - u_{xxx}\Big)_x \tag{2.7}$$

которое и представляет собой уравнение Кадомцева-Петвиашвили, предложенное в 1970 г. В общем случае получающуюся из (2.4) систему нельзя свести к одному уравнению.

2.3 Симметрии и законы сохранения

Как и в случае КдФ, все уравнения иерархии КП являются симметриями друг для друга. Иначе говоря, все векторные поля ∂_{t_j} коммутируют между собой, и величины u_i можно понимать как функции не только от x, но и от всех времен t_j одновременно. Проверка этого не представляет труда:

$$\begin{aligned} & \partial_{t_m}(\partial_{t_n}L) - \partial_{t_n}(\partial_{t_m}L) \\ = \; & \partial_{t_m}[A_n, L] - \partial_{t_n}[A_m, L] \\ = \; & [\partial_{t_m}A_n - \partial_{t_n}A_m,\, L] + [A_n, \partial_{t_m}L] - [A_m, \partial_{t_n}L] \\ = \; & [[A_m, A_n], L] + [A_n, [A_m, L]] - [A_m, [A_n, L]] = 0 \end{aligned}$$

При переходе к последней строчке использовано уравнение нулевой кривизны. Выражение в последней строчке тождественно зануляется после раскрытия коммутаторов.

Одним из следствий коммутативности векторных полей ∂_{t_j} являются соотношения

$$\partial_{t_m} \mathrm{res}\, L^n = \partial_{t_n} \mathrm{res}\, L^m \tag{2.8}$$

буквально обобщающие соответствующие формулы в случае КдФ. Их можно доказать и независимо, проделав выкладки, аналогичные (2.5), но не под знаком $(\dots)_+$, а под знаком res:

$$\partial_{t_m} \mathrm{res}\, L^n - \partial_{t_n} \mathrm{res}\, L^m = \mathrm{res}\, \Big(\partial_{t_m} L^n - \partial_{t_n} L^m - [A_m, A_n]\Big) \quad \text{и т. д.}$$

Кроме того, эти соотношения сразу следуют из (2.6).

Интегралы движения строятся так же, как и в случае КдФ, с той лишь разницей, что теперь нетривиальны, вообще говоря, все интегралы, а не только имеющие нечетные номера.

Утверждение. *Величины*

$$I_j = \int \mathrm{res}\, L^j \, dx \tag{2.9}$$

при $j \geq 1$ *являются интегралами движения для всех уравнений иерархии КП:* $\partial_{t_n} I_j = 0$.

Доказательство опять основано на представлении Лакса:

$$\partial_{t_n} I_j = \int \mathrm{res}\, (\partial_{t_n} L^j) dx = \int \mathrm{res}\, \Big([A_n, L^j]\Big)\, dx$$

Поскольку $\mathrm{res}\, [P, Q]$ для любых двух псевдодифференциальных операторов P, Q является полной производной, получаем, следовательно, что в быстроубывающем и периодическом случаях $\partial_{t_n} I_j = 0$.

Отметим, что из соотношения (2.8) следует, что плотности интегралов движения являются производными по временам от одной и той же функции v: $\mathrm{res}\, L^j = \partial_{t_j} v$, а из того, что вычет коммутатора любых двух псевдодифференциальных операторов есть полная производная по $x = t_1$, следует, что v можно представить как производную от некоторой функции f:

$$\partial_{t_m} \mathrm{res}\, L^n = \mathrm{res}\, [(L^m)_+,\, L^n] = \partial_{t_m} \partial_{t_n} v = \partial_{t_1} \partial_{t_m} \partial_{t_n} f$$

а также

$$\mathrm{res}\, L^n = \partial_{t_1} \partial_{t_n} f$$

Функция f будет играть важную роль. Мы увидим, что она является логарифмом τ-функции.

2.4 Одевающий оператор

Представления Лакса и нулевой кривизны допускают красивую переформулировку в терминах так называемого *одевающего оператора* K. Его можно было бы ввести и в случае КдФ, но конструкция становится по-настоящему полезной именно в случае иерархии КП, на которую, в отличие от КдФ, не наложены никакие связи типа $(L^N)_- = 0$.

Одевающий оператор – это псевдодифференциальный оператор вида

$$K = 1 + \xi_1 \partial^{-1} + \xi_2 \partial^{-2} + \dots$$

такой, что

$$L = K \partial K^{-1} \tag{2.10}$$

При этом говорят, что оператор K "одевает" оператор ∂, а L представляет собой результат этого одевания. Очевидно, $L^m = K\partial^m K^{-1}$. Заметим, что K определен с точностью до умножения справа на оператор вида $1 + \sum_{k\geq 1} a_k \partial^{-k}$ с постоянными коэффициентами a_k.

Утверждение. *Пусть одевающий оператор удовлетворяет уравнениям*

$$\partial_{t_n} K = -(K\partial^n K^{-1})_- \, K \,, \tag{2.11}$$

тогда $L = K\partial K^{-1}$ удовлетворяет уравнениям Лакса иерархии КП.

Упражнение. Доказать это утверждение прямым вычислением и проверить, что (2.11) можно записать в виде

$$\partial_{t_n} K = (L^n)_+ K - K\partial^n$$

Аналогичным вычислением можно доказать, что векторные поля ∂_{t_j}, определенные равенствами (2.11), коммутируют не только при действии на коэффициенты оператора L, но и при действии на коэффициенты оператора K (которые, вообще говоря, не выражаются как дифференциальные полиномы от u_i): $\partial_{t_m}(\partial_{t_n} K) = \partial_{t_n}(\partial_{t_m} K)$.

Поскольку

$$K(\partial_{t_m} - \partial^m)K^{-1} = \partial_{t_m} - (\partial_{t_m} K)K^{-1} - L^m = \partial_{t_m} + (K\partial^m K^{-1})_- - L^m = \partial_{t_m} - A_m$$

уравнения Лакса и уравнения нулевой кривизны можно представить в виде

$$K[\partial_{t_m} - \partial^m, \, \partial]K^{-1} = 0$$

$$K[\partial_{t_m} - \partial^m, \, \partial_{t_n} - \partial^n]K^{-1} = 0$$

Можно сказать, что они получаются "одеванием" очевидных соотношений $[\partial_{t_m} - \partial^m, \, \partial] = 0$ и $[\partial_{t_m} - \partial^m, \, \partial_{t_n} - \partial^n] = 0$.

2.5 Линейные задачи и функция Бейкера-Ахиезера

Уравнение нулевой кривизны (2.4) является условием совместности линейных задач

$$\begin{cases} \partial_{t_m} \psi = A_m \psi \\ \\ \partial_{t_n} \psi = A_n \psi \end{cases} \tag{2.12}$$

Как и ранее, совместность означает наличие большого запаса общих решений. Их опять можно искать в виде ряда по спектральному параметру k, который, хотя явно и не входит в формулировку линейных задач, играет столь же важную роль, что и в теории уравнения КдФ. Для краткости введем обозначение

$$\xi(\mathbf{t}, k) = kx + k^2 t_2 + k^3 t_3 + \dots \tag{2.13}$$

и будем искать решения системы (2.12) в виде

$$\psi = e^{\xi(\mathbf{t},k)} \left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + \dots \right) \tag{2.14}$$

где коэффициенты ξ_i зависят только от x (и от t_j). В систему совместных линейных задач (2.12) можно добавить уравнение $L\psi = k\psi$, содержащее спектральный параметр в явном виде.

Легко видеть, что общие решения системы (2.12) строятся применением одевающего оператора K к “плоской волне” $e^{\xi(\mathbf{t},k)}$:

$$\psi = Ke^{\xi(\mathbf{t},k)} = \left(1 + \xi_1 \partial^{-1} + \xi_2 \partial^{-2} + \dots \right) e^{\xi(\mathbf{t},k)} \tag{2.15}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_{t_m} \psi &= k^m K e^{\xi(\mathbf{t},k)} + \partial_{t_m} K e^{\xi(\mathbf{t},k)} = (K\partial^m - (K\partial^m K^{-1})_- K) e^{\xi(\mathbf{t},k)} \\ &= (K\partial^m K^{-1} - (K\partial^m K^{-1})_-) K e^{\xi(\mathbf{t},k)} = (L^m - (L^m)_-)\psi = A_m \psi \end{aligned}$$

Наряду с одевающим оператором K полезно также рассматривать формально сопряженный ему оператор $K^\dagger = 1 - \partial^{-1}\xi_1 + \partial^{-2}\xi_2 - \dots$ и построить с его помощью *сопряженную функцию Бейкера-Ахиезера*

$$\psi^* = (K^\dagger)^{-1} e^{-\xi(\mathbf{t},k)} \tag{2.16}$$

Она имеет вид

$$\psi^* = e^{-\xi(\mathbf{t},k)} \left(1 + \frac{\xi_1^*}{k} + \frac{\xi_2^*}{k^2} + \dots \right)$$

(здесь звездочка не означает комплексного сопряжения!) и удовлетворяет системе совместных линейных задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{t_m} \psi^* = -A_m^\dagger \psi^* \\ \\ L^\dagger \psi^* = k\psi^* \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Задача. Показать, что в случае редукции к КдФ ($(L^2)_- = 0$) $\psi^*(k) = 2k\psi(-k)/W(k)$, где W - вронскиан функций $\psi(k)$ и $\psi(-k)$ (см. (1.30)).

Докажем формулу, выражающую $(L^m)_-$ через ψ и ψ^*:

$$(L^m)_- = \mathrm{res}_z \Big(z^m \psi(z)\, \partial^{-1} \psi^*(z) \Big) \tag{2.18}$$

где выражение $\partial^{-1}\psi^*(z)$ в правой части понимается как композиция операторов (а не как результат действия оператора ∂^{-1} на $\psi^*(z)$). Поскольку мы будем иметь дело как с обычным, так и с операторным вычетом, обозначим их res_z и res_∂ соответственно. Очевидно, что

$$(L^m)_- = \sum_{l\geq 0} \mathrm{res}_\partial \Big(L^m \partial^l \Big)\, \partial^{-l-1} = \sum_{l\geq 0} \mathrm{res}_\partial \Big(K \partial^m K^{-1} \partial^l \Big)\, \partial^{-l-1}$$

Теперь, чтобы преобразовать операторный вычет в обычный, воспользуемся ранее доказанной леммой, утверждающей, что для любых псевдодифференциальных операторов P, Q справедливо соотношение $\mathrm{res}_z \left[(Pe^{xz})\,(Qe^{-xz}) \right] = \mathrm{res}_\partial (PQ^\dagger)$ и напишем, продолжая равенство:

$$(L^m)_- = \sum_{l\geq 0} \mathrm{res}_z \Big[\Big(K\partial^m e^{\xi(t,z)} \Big) \Big((-\partial)^l (K^\dagger)^{-1} e^{-\xi(t,z)} \Big) \Big]\, \partial^{-l-1}$$

(Здесь оператор $(-\partial)^l$ действует на то, что стоит справа от него.) Переписав правую часть в терминах функции Бейкера-Ахиезера и ей сопряженной, будем иметь:

$$(L^m)_- = \sum_{l\geq 0} \mathrm{res}_z \Big[(L^m \psi(z))(\partial^l \psi^*(z)) \Big] (-1)^l \partial^{-l-1} = \sum_{l\geq 0} \mathrm{res}_z \Big[z^m \psi(z)\, \partial^l \psi^*(z) \Big] (-1)^l \partial^{-l-1}$$

Наконец, преобразовав правую часть с помощью коммутационного соотношения $\partial^{-1} f = \sum_{l\geq 0} (-1)^l f^{(l)} \partial^{-l-1}$, придем к (2.18). При редукции к КдФ, с учетом утверждения приведенной выше задачи, получим равенство (1.34).

Ключом к построению решений уравнения КП является следующая техническая лемма (мы пользуемся обозначениями $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t$, $u = 2u_1$, в которых написано уравнение КП (2.7)).

Лемма *(простая, но важная). Для функции ψ вида*

$$\psi = e^{kx+k^2y+k^3t} \left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + \ldots \right) \tag{2.19}$$

справедливы формальные равенства

$$\begin{aligned} (-\partial_y + \partial^2 + u)\psi &= O(k^{-1}) e^{kx+k^2y+k^3t} \\ (-\partial_t + \partial^3 + \tfrac{3}{2} u\partial + w)\psi &= O(k^{-1}) e^{kx+k^2y+k^3t} \end{aligned} \tag{2.20}$$

где функции u, w могут быть найдены из условия обращения в нуль коэффициентов при неотрицательных степенях k:

$$\begin{aligned} u &= -2\xi_{1,x} \\ w &= 3\xi_1\xi_{1,x} - 3\xi_{1,xx} - 3\xi_{2,x} \end{aligned} \tag{2.21}$$

По смыслу эта лемма аналогична соответствующему утверждению про ψ-функцию для уравнения КдФ. Доказательство заключается в прямом вычислении.

2.6 Решения иерархии КП

2.6.1 Солитонные решения

Построение солитонных решений идейно и технически повторяет соответствующую конструкцию для КдФ. Поэтому здесь оно изложено с меньшей степенью подробности.

Рассмотрим линейное пространство функций $\psi = \psi(k)$ мероморфных везде кроме бесконечности и таких, что:

а) функция $\psi e^{-kx-k^2y-k^3t}$ регулярна в окрестности точки $k = \infty$;

б) ψ имеет не более N полюсов (с учетом кратностей) в заданных конечных точках комплексной плоскости, а в остальном голоморфна везде кроме ∞;

в) для N пар различных точек $p_j, q_j \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения $\psi(p_j) = \alpha_j \psi(q_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Аналогично тому, как это было в случае КдФ, нетрудно убедиться, что это пространство одномерно, а операторы в левых частях равенств (2.20) переводят его в себя. Для простоты опять ограничимся случаем, когда все полюса сосредоточены в точке $k = 0$. Если искать ψ в виде

$$\psi = e^{\xi(\mathbf{t},k)} \left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + \ldots + \frac{\xi_N}{k^N}\right),$$

то лемма гарантирует, что $u = -2\xi_{1,x}$ является решением уравнения КП.

Найдем это решение в явном виде. Условия $\psi(p_j) = \alpha_j \psi(q_j)$ эквивалентны следующей системе линейных уравнений на ξ_j:

$$\sum_{j=1}^{N} M_{ij}\, \xi_j = -M_{i0}$$

где $M_{ij} = p_i^{-j} e^{\xi(\mathbf{t},p_i)} - \alpha_i q_i^{-j} e^{\xi(\mathbf{t},q_i)}$. Правило Крамера дает

$$\xi_1 = -\frac{\det M_{ij}^{(0)}}{\det M_{ij}}\,, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N$$

где матрица $M_{ij}^{(0)}$ отличается от M_{ij} заменой первого столбца M_{i1} на M_{i0} (i – номер строки). Поскольку $\partial_x M_{ij} = M_{i,j-1}$, имеем $\det M_{ij}^{(0)} = \partial_x \det M_{ij}$, и $\xi_1 = -\partial_x \log\det M_{ij}$, так что $u = 2\partial_x^2 \log\det M_{ij}$. Итак, мы получили семейство решений, которые выражаются той же формулой (1.41) с τ-функцией

$$\tau = \det_{1\le i,j\le N} \left(p_i^{-j} e^{\xi(\mathbf{t},p_i)} - \alpha_i q_i^{-j} e^{\xi(\mathbf{t},q_i)}\right) \tag{2.22}$$

Как и ранее, таким образом получаются решения сразу всей иерархии. Все α_i опять можно “спрятать” в начальные значения времен t_j, так что параметрами решения являются только p_i и q_i (всего $2N$ параметров).

При $N=1$ получаем односолитонное решение: $\tau = p^{-1}e^{\xi(\mathbf{t},p)} - \alpha q^{-1}e^{\xi(\mathbf{t},q)}$,

$$u = -\frac{2pq(p-q)^2 e^{\xi(\mathbf{t},p)+\xi(\mathbf{t},q)}}{(qe^{\xi(\mathbf{t},p)} - \alpha p e^{\xi(\mathbf{t},q)})^2} = -\frac{(p-q)^2}{2\sinh^2\left(\frac{1}{2}(\xi(\mathbf{t},p) - \xi(\mathbf{t},q) + \varphi)\right)}$$

где $\varphi = \log\left(\frac{q}{\alpha p}\right)$. Положив $\alpha = -q/p$, запишем односолитонное решение уравнения КП в виде

$$u(x,y,t) = \frac{(p-q)^2}{2\cosh^2\left(\frac{1}{2}(p-q)x + \frac{1}{2}(p^2-q^2)y + \frac{1}{2}(p^3-q^3)t\right)} \tag{2.23}$$

В случае $q = -p$ зависимость от $y = t_2$ (и вообще от всех времен с четными номерами) полностью исчезает, и эта формула воспроизводит солитон уравнения КдФ (1.40). Отметим, что решение $u(x,y,t)$, определенное формулой (2.23), убывает на плоскости (x,y) во всех направлениях кроме направления вдоль прямой $x+(p+q)y=0$, и поэтому в физическом понимании не может считаться двумерным солитоном.

Укажем также эквивалентное детерминантное представление многосолитонной τ-функции:

$$\tau = \det_{1\le i,j\le N}\left(\delta_{ij} + \frac{\beta_i(p_i-q_i)}{p_i-q_j}\, e^{\xi(\mathbf{t},p_i)-\xi(\mathbf{t},q_i)}\right) \tag{2.24}$$

Раскрыв детерминант, пользуясь известной формулой для детерминанта Коши

$$\det_{i,j=1,\dots,N}\frac{1}{p_i-q_j} = \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le N}(p_i-p_j)(q_j-q_i)}{\prod\limits_{1\le i,j\le N}(p_i-q_j)}$$

которую нетрудно доказать, сравнивая аналитические свойства рациональных функций в левой и правой части, получим:

$$\tau = \sum_{\{\epsilon_1,\dots,\epsilon_N\}\in\mathbb{Z}_2^N}\ \prod_{i<j}^{N}\left(\frac{(p_i-p_j)(q_j-q_i)}{(p_i-q_j)(p_j-q_i)}\right)^{\epsilon_i\epsilon_j}\prod_{k=1}^{N}\left(\beta_k e^{\xi(\mathbf{t},p_k)-\xi(\mathbf{t},q_k)}\right)^{\epsilon_k} \tag{2.25}$$

Суммирование ведется по всем наборам из N чисел ϵ_i, принимающих значения $0,1$, так что сумма содержит 2^N членов. Например, при $N=2$ имеем:

$$\tau = 1 + \beta_1 e^{(p_1-q_1)x} + \beta_2 e^{(p_2-q_2)x} + \beta_1\beta_2\frac{(p_1-p_2)(q_2-q_1)}{(p_1-q_2)(p_2-q_1)}e^{(p_1+p_2-q_1-q_2)x}$$

где для простоты в показателях экспонент выписаны только члены с x.

2.6.2 Рациональные решения

Устремляя $q_i \to p_i$ в многосолитонных решениях и специальным образом подбирая значения параметров α_i, можно в пределе получить решения, τ-функция для которых будет полиномом от x и всех времен t_j, а u, следовательно, рациональной функцией. Такие решения называются рациональными. Их можно строить тем же способом, что и солитонные, рассмотрев линейное пространство функций $\psi = \psi(z)$ с теми же аналитическими свойствами а) и б) и условием в$''$) в N различных фиксированных точках p_i комплексной плоскости при всех t_j выполняются соотношения

$$\sum_{m=0}^{M_i} a_{im}\partial_z^m \psi(z)\Big|_{z=p_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Здесь a_{im} – некоторые константы (параметры решения, наряду с точками p_i).

Физически важный пример такого решения можно получить, положив $q_1 = p_1+\epsilon$, $q_2 = p_2 + \epsilon$, $\beta_1 = \beta_2 = -1$ в двухсолитонном решении и устремив $\epsilon \to 0$. Если положить $p_1 = p$, $p_2 = -\bar{p}$ и считать y чисто мнимым (т.е. переопределить $y \to iy$), в пределе получится τ-функция

$$\tau = |x + 2ipy + 3p^2 t|^2 + \frac{1}{(p+\bar{p})^2}$$

которая описывает движение колоколообразного возбуждения в плоскости (x, y) (двумерный солитон в физическом понимании этого слова).

Задача. Найти линейные условия на ψ-функцию вида в$''$) для этого решения.

Дальнейшее вырождение рациональных решений можно получить, сливая точки p_i и устремляя их к 0. При этом решения остаются рациональными и допускают явное описание в терминах полиномов Шура.

Определим полиномы $h_j = h_j(\mathbf{t})$ от времен t_i с помощью разложения

$$e^{\xi(\mathbf{t},k)} = \sum_{l=0}^{\infty} h_l(\mathbf{t})k^l \tag{2.26}$$

Например, $h_0 = 1$, $h_1 = t_1$, $h_2 = t_2 + \frac{1}{2}t_1^2$, $h_3 = t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2 + \frac{1}{6}t_1^3$ и т. д. Оказывается, любой из полиномов h_j является τ-функцией иерархии КП, т. е. $u = 2\partial_{t_1}^2 \log h_j$ является решением.

Более общие вырожденные рациональные решения можно построить, взяв диаграмму Юнга λ произвольной формы, т. е. некоторый набор целых положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ таких, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ (λ_i – длины строк диаграммы λ). По каждой диаграмме Юнга можно построить полином Шура

$$s_\lambda = \det_{1\leq i,j\leq n} h_{\lambda_i - i + j}$$

(считается, что $h_l = 0$ при отрицательных l). Все полиномы Шура являются τ-функциями иерархии КП.

2.6.3 Тригонометрические решения

Вернемся к невырожденным солитонным решениям. Примем для простоты, что все p_i, q_i вещественны. Тогда построенные решения $u(x)$ экспоненциально убывают при $x \to \pm\infty$ на вещественной оси и осциллируют при сдвигах x вдоль мнимой оси. При $N > 1$ решение, вообще говоря, не имеет определенного периода вдоль мнимой оси (поскольку числа $p_i - q_i$ и $p_j - q_j$ в общем случае несоизмеримы). Среди N-солитонных решений КП можно выделить N-параметрическое семейство таких, которые имеют некоторый наперед заданный период $2\pi L$ вдоль мнимой оси. Очевидно, для существования такого периода достаточно, чтобы параметры p_i, q_i подчинялись условиям $q_i = p_i + 2\pi/L$, которые уменьшают число свободных параметров до N (не считая самого периода). При этом из формулы (2.25) следует, что τ-функция как функция от x будет полиномом от $e^{2\pi x/L}$ степени N. С точностью до несущественного общего множителя ее можно представить в виде произведения

$$\tau = \prod_{j=1}^{N} \sinh \frac{\pi(x - x_j(t))}{L} \tag{2.27}$$

где нули x_j зависят от всех времен начиная с t_2: $x_j = x_j(t_2, t_3, \ldots)$. Соответственно, для u получаем разложение по полюсам

$$u = -2\sum_{j=1}^{N} \frac{(\pi/L)^2}{\sinh^2 \pi(x - x_j(t))/L} \tag{2.28}$$

Решения такого вида будем называть тригонометрическими.

Имеется замечательная связь между динамикой полюсов рациональных и тригонометрических решений уравнения КП и интегрируемыми системами частиц Калоджеро-Мозера, установленная (в более общем случае эллиптических решений) И.Кричевером. Оказывается, если функция вида (2.28) удовлетворяет уравнению КП, ее полюса x_j как функции времени t_2 двигаются согласно уравнениям движения системы N частиц на прямой с гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} P_j^2 + 2\sum_{i<j}^{N} \frac{(\pi/L)^2}{\sinh^2 \pi(x_i - x_j)/L} \tag{2.29}$$

Все это верно и в случае рациональных решений, только функцию $\sin x$ надо заменить на x, при этом получается система Калоджеро-Мозера с потенциалом $2/(x_i - x_j)^2$. Более того, динамика полюсов по высшим временам t_3, t_4 и т. д. описывается высшими гамильтонианами системы частиц Калоджеро-Мозера (2.29) (H_3, H_4 и т. д.), находящимися в инволюции. Заметим, что в случае КдФ указанное соответствие означает, что частицы в системе с гамильтонианом H_2 (2.29) не двигаются, т. е. находятся в положении равновесия, а динамика генерируется гамильтонианом H_3. В случае рациональных решений такая ситуация оказывается возможной не при любых N, а только при $N = n(n+1)/2$.

2.6.4 Решения, зависящие от функциональных параметров

Описанную выше процедуру построения решений иерархии КП можно обобщить на значительно более широкий класс решений. Для этого достаточно заметить, что вся аргументация останется в силе, если N линейных условий на коэффициенты ψ-функции вида $\psi(p_i) = \alpha_i \psi(q_i)$ заменить на $\sum_l \rho_{il}\psi(p_i^{(l)}) = 0$ или даже на $\int \rho_i(p)\psi(p)d\mu(p) = 0$, с некоторой мерой $d\mu$ и функциями $\rho_i(p)$ на комплексной плоскости.

Более точно, рассмотрим линейное пространство функций $\psi = \psi(k)$ с теми же аналитическими свойствами а) и б), что и раньше, но вместо условия в) наложим в$'$) для N различных фиксированных функций $\rho_i(k)$ и некоторой меры $d\mu(k)$ на комплексной плоскости выполняются соотношения

$$\int \rho_i(k)\psi(k)d\mu(k) = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Очевидно, солитонные решения соответствуют случаю, когда $\rho_i(k)$ выбирается в виде линейной комбинации двух δ-функций, сосредоточенных в точках p_i и q_i. Нетрудно убедиться, что это пространство одномерно и в общем случае, а операторы в левых частях равенств (2.20) переводят его в себя. Процедура построения τ-функции опять сводится к решению системы линейных уравнений, что дает

$$\tau = \det_{1\le i,j\le N} \int k^{-j}\rho_i(k)e^{\xi(t,k)}d\mu(k) \tag{2.30}$$

Предполагается, что мера выбрана так, что интеграл сходится. Функции $\rho_i(k)$ (и мера $d\mu$) являются функциональными параметрами построенного решения. Отметим, что такие решения имеются только для иерархии КП; в случае КдФ общее линейное условие типа в$'$) нарушается под действием операторов в левых частях равенств (1.39).

2.6.5 Общее решение иерархии КП: нелокальная $\bar\partial$-задача

Общий способ задать функцию ψ таким образом, чтобы из асимптотических равенств (2.20) следовали бы точные равенства, состоит в постановке так называемой нелокальной $\bar\partial$-задачи ($\bar\partial \equiv \partial_{\bar z}$). Потребуем, чтобы функция $\psi = \psi(z)$ с асимптотикой при $z \to \infty$ вида

$$\psi(z) = e^{\xi(\mathbf{t},z)}w(z)\,, \qquad w(z) = 1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \ldots \tag{2.31}$$

удовлетворяла бы уравнению

$$\partial_{\bar z}\psi(z) = \int K(z,\zeta)\psi(\zeta)d^2\zeta \tag{2.32}$$

где интегрирование, вообще говоря, идет по всей комплексной плоскости с мерой $d^2z \equiv d(\mathcal{R}e\, z)d(\mathcal{I}m\, z)$, а $K(z,\zeta)$ – некоторое ядро, не зависящее от времен t_i. Предположим, что функция $K(z,\zeta)$ по каждой из переменных отлична от нуля только в некоторой компактной области, тогда вне этой области, при достаточно больших $|z|$, можно требовать голоморфную асимптотику (2.31). Функция $K(z,\zeta)$ может быть обобщенной функцией, т.е. содержать дельта-функции, сосредоточенные в точках или на контурах. Уравнение (2.32) называется нелокальной $\bar\partial$-задачей (нелокальной она называется, потому что в правой части присутствует интеграл). Предположим, что ее решение существует и единственно (с точностью до общего множителя). Тогда мы попадаем в описанную выше ситуацию, и $u = -2\xi_1'$ удовлетворяет уравнению КП. Условия на ядро, при которых решение $\bar\partial$-задачи существует и единственно, трудно сформулировать в общем виде, и этот вопрос должен являться предметом отдельного исследования в каждом конкретном случае.

Интегро-дифференциальное уравнение (2.32) можно свести к интегральному уравнению на функцию $w = \psi e^{-\xi(t,z)}$. Сама $\bar{\partial}$-задача перепишется очевидным образом в виде

$$\partial_{\bar{z}} w(z) = \int K_t(z,\zeta) w(\zeta) d^2\zeta \tag{2.33}$$

где ядро $K_t(z,\zeta)$ зависит от времен:

$$K_t(z,\zeta) = e^{\xi(t,\zeta)-\xi(t,z)} K(z,\zeta)$$

В силу формального тождества $\partial_{\bar{z}}(1/z) = \pi\delta^{(2)}(z)$ можно написать

$$w(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) d^2\zeta}{z-\zeta}$$

и тогда (2.33) перепишется как интегральное уравнение

$$w(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\int\int \frac{K_t(\zeta,\xi)w(\xi)}{z-\zeta}\, d^2\zeta d^2\xi \tag{2.34}$$

Замечание. В случае $K(z,\zeta) = K(z)\delta^{(2)}(z+\zeta)$ получаются решения иерархии КдФ; $\bar{\partial}$-задача имеет при этом вид

$$\partial_{\bar{z}}\psi(z) = K(z)\psi(-z) \tag{2.35}$$

В качестве примера опять рассмотрим солитонные решения. Возьмем ядро, сосредоточенное в точках:

$$K(z,\zeta) = -\pi\sum_{j=1}^{N}\tilde{\beta}_j \delta^{(2)}(z-q_j)\delta^{(2)}(\zeta-p_j) \tag{2.36}$$

тогда интегральное уравнение (2.34) примет вид

$$w(z) = 1 - \sum_{j=1}^{N}\tilde{\beta}_j \frac{w(p_j)}{z-q_j}\, e^{\xi(\mathbf{t},p_j)-\xi(\mathbf{t},q_j)}$$

Правая часть определяет функцию $w(z)$ как рациональную функцию с полюсами в точках q_j. Обозначив $w_j = w(p_j)$, получим систему линейных уравнений

$$w_i = 1 - \sum_{j=1}^{N}\frac{\tilde{\beta}_j e^{\xi(\mathbf{t},p_j)-\xi(\mathbf{t},q_j)}}{p_i-q_j}\, w_j \tag{2.37}$$

из которой нам надо найти

$$\xi_1 = -\sum_{j=1}^{N}\tilde{\beta}_j e^{\xi(\mathbf{t},p_j)-\xi(\mathbf{t},q_j)}\, w_j$$

Решение опять заключается в применении правила Крамера и дает $u = 2\partial_x^2 \log\tau$ с τ-функцией (2.24) и $\tilde{\beta}_j = (p_j-q_j)\beta_j$.

Задача. Найти ядро $\bar{\partial}$-задачи, отвечающее решениям, зависящим от функциональных параметров.

2.7 Дополнительные (неабелевы) симметрии иерархии КП

Неабелевы симметрии иерархии КП существенно богаче, чем в случае КдФ. Для того чтобы определить их в общем виде, необходимо расширить формализм Лакса, введя в рассмотрение некоторый новый оператор M, удовлетворяющий тем же уравнениям Лакса и образующий с L каноническую пару, т.е. коммутирующий с ним на 1 (так называемый оператор Орлова-Шульмана). Его проще всего ввести, пользуясь одеванием с помощью оператора K.

Заметим, что кроме оператора ∂ имеется еще один оператор, коммутирующий с $\partial_{t_n} - \partial^n$, а именно

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} kt_k \partial^{k-1} = x + 2t_2\partial + 3t_3\partial^2 + \dots$$

Отметим, что ∂ действует на экспоненту $e^{\xi(t,z)}$ как умножение на z, а оператор Γ – как дифференцирование по z:

$$\partial e^{\xi(\mathbf{t},z)} = ze^{\xi(\mathbf{t},z)}, \qquad \Gamma e^{\xi(\mathbf{t},z)} = \partial_z e^{\xi(\mathbf{t},z)} \tag{2.38}$$

Подобно тому как одевание очевидного коммутационного соотношения $[\partial, \partial_{t_n} - \partial^n] = 0$ с помощью оператора K давало уравнения движения для оператора Лакса, одевание соотношения $[\Gamma, \partial_{t_n} - \partial^n] = 0$ дает $[M, \partial_{t_n} - A_n] = 0$ или

$$\partial_{t_n} M = [A_n, M], \qquad A_n = (L^n)_+, \tag{2.39}$$

где $M = K\Gamma K^{-1}$ есть оператор Орлова-Шульмана.

Упражнение. Убедиться в справедливости (2.39) прямым вычислением.

Оператор Орлова-Шульмана обычно представляют в виде ряда по степеням оператора Лакса:

$$M = \sum_{k\geq 2} kt_k L^{k-1} + x + \sum_{k\geq 1} v_k L^{-k-1} \tag{2.40}$$

где "хвост" разложения (ряд по отрицательным степеням L) получается из одевания KxK^{-1}, и v_k зависят от x и всех высших времен. Ясно, что уравнение Лакса типа (2.39) верно и для любой функции от L и M, например:

$$\partial_{t_n}(M^m L^l) = [A_n, M^m L^l] \tag{2.41}$$

Действуя одевающим оператором слева на обе части соотношений (2.38), находим, как L и M действуют на функцию Бейкера-Ахиезера:

$$L\psi = z\psi, \qquad M\psi = \partial_z \psi \tag{2.42}$$

Наконец, одевание очевидного соотношения $[\partial, \Gamma] = 1$ дает

$$[L, M] = 1 \tag{2.43}$$

так что L и M действительно образуют каноническую пару. Это же видно и из (2.42).

Теперь все готово, чтобы ввести дополнительные симметрии. Пусть s_{lm} – параметры симметрий (они теперь будут нумероваться двумя индексами), а $\partial_{s_{lm}}$ – соответствующие векторные поля. Рассмотрим уравнения

$$\partial_{s_{lm}} L = -[(M^m L^l)_-, L] \tag{2.44}$$

которые задают потоки на пространстве операторов L. Очевидно, $\partial_{s_{n0}} = \partial_{t_n}$.

Утверждение. *Уравнения (2.44) являются симметриями иерархии КП.*

Легко проверить, что обе части равенств (2.44) представляют собой псевдодифференциальные операторы порядка -1, а потому потоки корректно определены. Для того чтобы показать, что они задают симметрии, нужно вычислить $X := [\partial_{s_{lm}}, \partial_{t_n}]L = \partial_{s_{lm}}(\partial_{t_n} L) - \partial_{t_n}(\partial_{s_{lm}} L)$ и убедиться, что $X = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}
X &= \partial_{s_{lm}}(\partial_{t_n} L) - \partial_{t_n}(\partial_{s_{lm}} L)\\
&= -\partial_{s_{lm}}[(L^n)_-, L] + \partial_{t_n}[(M^m L^l)_-, L]\\
&= -[(L^n)_-, \partial_{s_{lm}} L] - [\partial_{s_{lm}}(L^n)_-, L] + [\partial_{t_n}(M^m L^l)_-, L] + [(M^m L^l)_-, \partial_{t_n} L]\\
&= \Big[(L^n)_-, [(M^m L^l)_-, L]\Big] - \Big[\partial_{s_{lm}}(L^n)_- - \partial_{t_n}(M^m L^l)_-, L\Big] - \Big[(M^m L^l)_-, [(L^n)_-, L]\Big]\\
&= \Big[\partial_{t_n}(M^m L^l)_- - \partial_{s_{lm}}(L^n)_- + [(L^n)_-, (M^m L^l)_-],\, L\Big]
\end{aligned}$$

При переходя от предпоследней строчке к последней было использовано тождество Якоби для двойного коммутатора. Теперь вычислим $\partial_{s_{lm}}(L^n)_-$ с помощью определения (2.44) и покажем, что стоящий в коммутаторе оператор равен 0, т.е.

$$\partial_{t_n}(M^m L^l)_- - \partial_{s_{lm}}(L^n)_- + [(L^n)_-, (M^m L^l)_-] = 0. \tag{2.45}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\partial_{s_{lm}}(L^n)_- &= -\Big([(M^m L^l)_-, L^n]\Big)_-\\
&= -[(M^m L^l)_-, (L^n)_-] - \Big([M^m L^l, (L^n)_+]\Big)_-\\
&= -[(M^m L^l)_-, (L^n)_-] + \partial_{t_n}(M^m L^l),
\end{aligned}$$

что эквивалентно (2.45).

Итак, мы показали, что векторные поля, заданные уравнениями (2.44), являются симметриями иерархии КП. Однако, они, вообще говоря, не коммутируют и потому не являются симметриями друг для друга. В общем случае эти симметрии нелокальны, т.е. содержат интегралы от u_i по x.

Построенное “дважды бесконечное” семейство включает трехпараметрическое семейство симметрий, которые обобщают простейшие симметрии КдФ (1.54). Для уравнения КП они выглядят следующим образом. Если $u(x, y, t)$ удовлетворяет уранению КП (2.7), то $\tilde{u}$, определенная как функция от $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}$ равенствами

$$\begin{cases} \tilde{u} = \ \lambda^{-2}u - 2a\lambda^{-1} \\ \tilde{x} = \ \lambda x + 2b\lambda y + (3a\lambda^2 + 3b^2\lambda)t \\ \tilde{y} = \lambda^2 y + 3b\lambda^2 t \\ \tilde{t} = \ \lambda^3 t \end{cases} \tag{2.46}$$

удовлетворяет такому же уравнению. Другими словами, преобразование

$$u(x,y,t) \to \ \lambda^{-2}u\left(\lambda^{-1}x - 2b\lambda^{-2}y - (3a\lambda^{-2} - 3b^2\lambda^{-3})t,\ \lambda^{-2}y - 3b\lambda^{-3}t,\ \lambda^{-3}t\right) - 2a\lambda^{-1}$$

переводит решение в решение, что можно проверить прямой подстановкой. При $\lambda = 1$, $b = 0$, $a \neq 0$ получается преобразование Галилея. Нетрудно проверить, что оно порождается векторным полем

$$\partial_{s_{-1,1}} L = -[(ML^{-1})_-,\ L]$$

Задача. Найти векторные поля типа (2.44), которые порождают преобразования вида (2.46) с $\lambda = 1$, $b \neq 0$, $a = 0$ и $\lambda \neq 1$, $b = 0$, $a = 0$.

2.8 τ-функция иерархии КП

До сих пор τ-функция эпизодически появлялась как удобный вспомогательный объект при рассмотрении солитонных решений. В действительности τ-функция играет совершенно фундаментальную роль в теории иерархии КП (и других интегрируемых иерархий). Переход к τ-функции, рассматриваемой в качестве зависимой переменной, позволяет дать формулировку иерархии КП как бесконечной совокупности совместных уравнений на *одну* функцию, а не на бесконечное их количество, как в исходной формулировке. В терминах τ-функции все уравнения иерархии КП становятся билинейными и могут быть закодированы в *одном* “производящем уравнении”, известном как билинейное разностное уравнение Хироты. Однако, вывести все это, взяв за основу представление Лакса, не так просто. Даже введение самого понятия τ-функции требует некоторой подготовки.

2.8.1 Билинейное тождество

Мы начнем с переформулировки иерархии КП в терминах функции Бейкера-Ахиезера и сопряженной к ней.

Наряду с “операторным вычетом” $\mathrm{res} = \mathrm{res}_\partial$ будем также рассматривать обычный вычет ряда Лорана $\sum_j a_j z^j$, определяемый как $\mathrm{res}_z \sum_j a_j z^j = a_{-1}$.

Утверждение. *Для ψ-функции любого решения иерархии КП справедливо тождество*

$$\mathrm{res}_z \left(\psi(\mathbf{t}, z)\psi^*(\mathbf{t}', z)\right) = 0 \tag{2.47}$$

где $\mathbf{t} = \{t_j\}$, $\mathbf{t}' = \{t'_j\}$ *– два произвольных набора времен.*

Для доказательства используется ранее доказанная лемма, утверждающая, что для любых псевдодифференциальных операторов P, Q верно равенство

$$\mathrm{res}_z\left[(Pe^{xz})\,(Qe^{-xz})\right] = \mathrm{res}_\partial(PQ^\dagger)$$

Допустим, что функция $\psi(\mathbf{t}', z)$ может быть получена из $\psi(\mathbf{t}, z)$ разложением в ряд Тейлора по $t'_i - t_i$. Тогда достаточно доказать (3.54) для каждого члена этого ряда. Заметим также, что производные по t_i с $i \geq 2$ линейно выражаются через производные по $t_1 = x$ в силу (2.12). Поэтому достаточно доказать, что при всех $n \geq 0$ $\mathrm{res}_z((\partial^n\psi(t,z))\,\psi^*(t,z)) = 0$. Последнее легко проверяется с помощью упомянутой выше леммы:

$$\mathrm{res}_z(\partial^n\psi\,\psi^*) = \mathrm{res}_z\Big(\partial^n K e^{\xi(\mathbf{t},z)}(K^\dagger)^{-1}e^{-\xi(\mathbf{t},z)}\Big) = \mathrm{res}_\partial\left(\partial^n K\,K^{-1}\right) = \mathrm{res}_\partial\,\partial^n = 0$$

Верно также обратное утверждение: пусть ψ, ψ^* - ряды вида

$$\psi = e^{\xi(\mathbf{t},z)}\left(1 + \xi_1 z^{-1} + \xi_2 z^{-2} + \ldots\right), \quad \psi^* = e^{-\xi(\mathbf{t},z)}\left(1 + \xi_1^* z^{-1} + \xi_2^* z^{-2} + \ldots\right)$$

где коэффициенты ξ_j, ξ_j^* – некоторые функции времен t_i, и для всех наборов времен t'_i, t_i выполняется (3.54); тогда существует L-оператор вида (2.1), удовлетворяющий всем уравнениям Лакса, функция Бейкера-Ахиезера для которого совпадает с ψ (а сопряженная – с ψ^*).

Упражнение. Проверить билинейное тождество для функций ψ, ψ^*, отвечающих односолитонному решению.

Поясним подробнее, как следует понимать операцию взятия вычета в билинейном тождестве. Запишем $\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t},z)}w(\mathbf{t}, z)$, $\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t},z)}w^*(\mathbf{t}, z)$, где функции w, w^* разлагаются в ряды по обратным степеням z и, следовательно, регулярны в ∞. Билинейное тождество запишется тогда в виде

$$\mathrm{res}_z\left(e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}w(\mathbf{t},z)w^*(\mathbf{t}',z)\right) = 0 \tag{2.48}$$

Нужно разложить $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}$ по положительным степеням z, функцию $w(\mathbf{t}, z)w^*(\mathbf{t}', z)$ – по отрицательным, перемножить эти ряды и приравнять нулю коэффициент при z^{-1}. Это эквивалентно равенству нулю контурного интеграла

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}w(\mathbf{t},z)w^*(\mathbf{t}',z)dz = 0 \tag{2.49}$$

в котором контур $\mathcal{C}$ должен охватывать все особенности функции $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}$ и не должен охватывать ни одну из особенностей функции $w(\mathbf{t}, z)w^*(\mathbf{t}', z)$. Например, если только конечное число времен отлично от 0, функция $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}$ регулярна везде, кроме ∞, где имеет существенную особенность, и в качестве контура $\mathcal{C}$ можно взять окружность радиуса R при достаточно большом R.

2.8.2 "Японская" формула для функции Бейкера-Ахиезера

Одним из важнейших достижений японской школы М. Сато, М. Джимбо, Т. Мива и др. является замечательная формула, выражающая функцию Бейкера-Ахиезера через τ-функцию, и одновременно служащая определением последней.

Теорема. *Пусть ψ – функция Бейкера-Ахиезера иерархии КП, тогда существует функция $\tau(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ такая, что*

$$\boxed{\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t},z)}\,\frac{\tau(t_1 - \frac{1}{z},\, t_2 - \frac{1}{2z^2},\, t_3 - \frac{1}{3z^3},\, \ldots)}{\tau(t_1, t_2, t_3, \ldots)}} \tag{2.50}$$

Справедлива также аналогичная формула, выражающая сопряженную функцию Бейкера-Ахиезера через ту же τ-функцию:

$$\boxed{\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t},z)}\,\frac{\tau(t_1 + \frac{1}{z},\, t_2 + \frac{1}{2z^2},\, t_3 + \frac{1}{3z^3},\, \ldots)}{\tau(t_1, t_2, t_3, \ldots)}} \tag{2.51}$$

Формулу (2.50) можно переписать в другом виде. Запишем $\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t},z)}w(\mathbf{t}, z)$ и возьмем логарифмическую производную по z от обеих частей равенства (2.50). Мы получим

$$\partial_z \log w(\mathbf{t}, z) = \sum_{m\geq 1} \frac{\partial \log w(\mathbf{t}, z)}{\partial t_m}\, z^{-m-1} + \sum_{m\geq 1} \frac{\partial \log \tau}{\partial t_m} z^{-m-1}$$

что, очевидно, эквивалентно соотношениям

$$\frac{\partial \log \tau}{\partial t_n} = \mathrm{res}_z\Big[z^n\left(\partial_z - \partial(z)\right)\log w(\mathbf{t}, z)\Big] \tag{2.52}$$

где введено обозначение

$$\partial(z) = \sum_{j\geq 1} z^{-j-1}\frac{\partial}{\partial t_j}$$

Тем самым для доказательства существования τ-функции достаточно установить, что выражение

$$\mathrm{res}_z\Big[z^n\left(\partial_z - \partial(z)\right)\partial_{t_m}\log w(\mathbf{t}, z)\Big]$$

симметрично по индексам m, n.

Доказательство основано на билинейном тождестве. Вот его основные моменты.

Взяв в билинейном тождестве $t'_j = t_j - \zeta^{-j}/j$, запишем его в виде

$$\mathrm{res}_z\left(\psi(\mathbf{t}, z)\psi^*(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}], z)\right) = 0$$

где введено используемое и в дальнейшем удобное обозначение

$$F(\mathbf{t} \pm [z]) \equiv F(t_1 \pm z,\, t_2 \pm z^2/2,\, t_3 \pm z^3/3,\, \ldots)$$

После подстановки $\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t},z)}w(\mathbf{t}, z)$, $\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t},z)}w^*(\mathbf{t}, z)$ имеем

$$\mathrm{res}_z\left(\frac{w(\mathbf{t}, z)\, w^*(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}], z)}{1 - z/\zeta}\right) = 0$$

Легко проверить, что для любого ряда $f(z) = 1 + \sum_{j\geq 1} f_j z^{-j}$ справедливо тождество

$$\mathrm{res}_z\left(\frac{f(z)}{1 - z/\zeta}\right) = \sum_{j\geq 1} f_j\, \zeta^{1-j} = \zeta(f(\zeta) - 1) \tag{2.53}$$

применение которого к предыдущему равенству дает связь между w и w^*:

$$w(\mathbf{t}, z)\, w^*(\mathbf{t} - [z^{-1}], z) = 1 \tag{2.54}$$

Аналогично, из равенства

$$\mathrm{res}_z\Big(\psi(\mathbf{t}, z)\, \psi^*(\mathbf{t}-[\zeta_1^{-1}]-[\zeta_2^{-1}], z)\Big) = 0$$

переписанного в виде

$$\mathrm{res}_z \left(\frac{w(\mathbf{t}, z)\, w^*(\mathbf{t}-[\zeta_1^{-1}]-[\zeta_2^{-1}], z)}{(1 - z/\zeta_1)(1 - z/\zeta_2)}\right) = 0$$

с помощью тождества

$$\frac{1/\zeta_1 - 1/\zeta_2}{(1 - z/\zeta_1)(1 - z/\zeta_2)} = \frac{1}{\zeta_1(1 - z/\zeta_1)} - \frac{1}{\zeta_2(1 - z/\zeta_2)}$$

и формулы (2.53) находим

$$w(\mathbf{t}, \zeta_1)\, w^*(\mathbf{t}-[\zeta_1^{-1}]-[\zeta_2^{-1}], \zeta_1) = w(\mathbf{t}, \zeta_2)\, w^*(\mathbf{t}-[\zeta_1^{-1}]-[\zeta_2^{-1}], \zeta_2)$$

Выразив w^* через w с помощью (2.53) и положив $\zeta_1 = z$, $\zeta_2 = \zeta$, получаем

$$\frac{w(\mathbf{t}, z)}{w(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}], z)} = \frac{w(t, \zeta)}{w(t-[z^{-1}], \zeta)} \tag{2.55}$$

Прологарифмировав равенство (2.55) и подействовав на него оператором $\partial_z - \partial(z)$, получим:

$$(\partial_z - \partial(z)) \log w(\mathbf{t}, z) - (\partial_z - \partial(z)) \log w(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}], z) = -\partial(z) \log w(\mathbf{t}, \zeta) \tag{2.56}$$

Для краткости обозначим $Y_n(\mathbf{t}) := \mathrm{res}_z\Big[z^n(\partial_z - \partial(z)) \log w(\mathbf{t}, z)\Big]$. Умножив обе части (2.56) на z^n и взяв вычет, будем иметь

$$Y_n(\mathbf{t}) - Y_n(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}]) = -\partial_{t_n} \log w(\mathbf{t}, \zeta)$$

что после дифференцирования по t_m и вычитания аналогичного равенства с переставленными m и n дает

$$\partial_{t_m} Y_n(\mathbf{t}) - \partial_{t_n} Y_m(\mathbf{t}) = \partial_{t_m} Y_n(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}]) - \partial_{t_n} Y_m(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}])$$

Обозначим выражение в левой части через $F_{mn}(\mathbf{t})$ и разложим $F_{mn}(\mathbf{t} - [\zeta^{-1}])$ по степеням ζ: $F_{mn}(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}]) = F_{mn}(\mathbf{t}) - \zeta^{-1}\partial_{t_1} F_{mn}(\mathbf{t}) + \frac{1}{2}\, \zeta^{-2}(\partial_{t_1}^2 F_{mn}(\mathbf{t}) - \partial_{t_2} F_{mn}(\mathbf{t})) + \ldots$. Поскольку $F_{mn}(\mathbf{t}-[\zeta^{-1}]) = F_{mn}(t)$ при любых t_k и для любого решения, из сравнения коэффициентов при ζ^{-1} заключаем, что $\partial_{t_1} F_{mn}(\mathbf{t}) = 0$ при всех $\mathbf{t}$, т.е. F_{mn} не зависит от t_1. Далее, из сравнения коэффициентов при ζ^{-2} аналогично находим, что F_{mn} не зависит также и от t_2. Повторяя эти рассуждения, видим, что F_{mn} не зависит от времен, т.е. равна константе. Для тривиального решения $u_i = 0$ константа равна 0. Поскольку F_{mn} является дифференциальным полиномом от u_i, эта константа равна 0 для любого решения. Тем самым мы показали, что $\partial_{t_m} Y_n(\mathbf{t}) = \partial_{t_n} Y_m(\mathbf{t})$, что влечет за собой существование τ-функции и справедливость формул (2.50), (2.52). Формула (2.51) доказывается аналогично.

2.8.3 Уравнения иерархии КП в форме Хироты

Выразив в билинейном тождестве ψ и ψ^* через τ-функцию с помощью "японских" формул, получим билинейное соотношение для τ-функции

$$\mathrm{res}_z\left[\tau(\mathbf{t}-[z^{-1}])\,\tau(\mathbf{t}'+[z^{-1}])\,e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}\right]=0 \tag{2.57}$$

которое эквивалентно бесконечной системе билинейных дифференциальных уравнений для τ, получающихся в результате приравнивания нулю коэффициентов разложения левой части в ряд Тейлора по $\mathbf{t}'-\mathbf{t}$. Технически такое разложение удобно проделать, взяв в качестве t_i и t'_i соответственно t_i-T_i и t_i+T_i:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}_z\left[\tau(\mathbf{t}-\mathbf{T}-[z^{-1}])\,\tau(\mathbf{t}+\mathbf{T}+[z^{-1}])\,e^{-2\xi(\mathbf{T},z)}\right]\\
=\;&\mathrm{res}_z\left[e^{\xi(\tilde{\partial}_{\mathbf{T}},z^{-1})}(\tau(\mathbf{t}-\mathbf{T})\,\tau(\mathbf{t}+\mathbf{T}))\,e^{-2\xi(\mathbf{T},z)}\right]\\
=\;&\mathrm{res}_z\left[\sum_{j\geq 0}z^{-j}h_j(\tilde{\partial}_{\mathbf{T}})(\tau(\mathbf{t}-\mathbf{T})\,\tau(\mathbf{t}+\mathbf{T}))\sum_{l\geq 0}z^l h_l(-2\mathbf{T})\right]\\
=\;&\sum_{j\geq 0}h_j(-2\mathbf{T})h_{j+1}(\tilde{\partial}_{\mathbf{T}})\,\tau(\mathbf{t}-\mathbf{T})\,\tau(\mathbf{t}+\mathbf{T})\;=\;0
\end{aligned}$$

Здесь во второй строке сдвиг на $[z^{-1}]$ представлен в виде действия экспоненты от дифференциального оператора

$$\xi(\tilde{\partial}_{\mathbf{T}},z^{-1})=\sum_{j\geq 1}\frac{z^{-j}}{j}\,\partial_{T_j}$$

(использовано удобное обозначение $\tilde{\partial}_{\mathbf{T}}=\{\partial_{T_1},\,\frac{1}{2}\,\partial_{T_2},\,\frac{1}{3}\,\partial_{T_3},\ldots\}$), а в третьей строке произведено разложение экспонент с помощью полиномов Шура (2.26). Последнее равенство можно переписать также в виде

$$\sum_{j\geq 0}h_j(-2\mathbf{T})h_{j+1}(\tilde{\partial}_{\mathbf{X}})\,e^{\sum_{l\geq 1}T_l\partial_{X_l}}\tau(\mathbf{t}-\mathbf{X})\,\tau(\mathbf{t}+\mathbf{X})\Big|_{X_m=0}\;=\;0$$

Пользуясь символами D_i "билинейного дифференцирования" Хироты, которые определяются правилом

$$P(\mathbf{D})f(\mathbf{t})\cdot g(\mathbf{t}):=P(\partial_{\mathbf{X}})(f(\mathbf{t}-\mathbf{X})g(\mathbf{t}+\mathbf{X}))\Big|_{\mathbf{X}=0}$$

где $P(\mathbf{D})$ – любой полином от D_i, запишем его как

$$\sum_{j\geq 0}h_j(-2\mathbf{T})h_{j+1}(\tilde{\mathbf{D}})\,e^{\sum_{l\geq 1}T_lD_l}\tau(\mathbf{t})\cdot\tau(\mathbf{t})=0 \tag{2.58}$$

Первое нетривиальное уравнение, получающееся при разложении в ряд по T_i, имеет вид

$$(D_1^4+3D_2^2-4D_1D_3)\tau\cdot\tau=0 \tag{2.59}$$

Упражнение. Проверить, что уравнение (2.59) после подстановки $u=2\partial^2\log\tau$ превращается в уравнение КП (2.7).

2.9 Билинейное разностное уравнение Хироты

2.9.1 Билинейное разностное уравнение Хироты и его различные формы

Если в билинейном соотношении (2.57) взять $\mathbf{t}' = \mathbf{t} - [\lambda_1^{-1}] - [\lambda_2^{-1}] - [\lambda_3^{-1}]$, где $\lambda_{1,2,3}$ – произвольные комплексные параметры, т.е. положить

$$t'_k = t_k - \frac{\lambda_1^{-k}}{k} - \frac{\lambda_2^{-k}}{k} - \frac{\lambda_3^{-k}}{k}$$

мы получим

$$\mathrm{res}_z \left(\frac{\tau(\mathbf{t} - [z^{-1}])\, \tau(\mathbf{t} - [\lambda_1^{-1}] - [\lambda_2^{-1}] - [\lambda_3^{-1}] + [z^{-1}])}{(1 - z/\lambda_1)(1 - z/\lambda_2)(1 - z/\lambda_3)} \right) = 0$$

Чтобы опять иметь возможность воспользоваться тождеством (2.53), представим произведение полюсных множителей как сумму простых полюсов по z:

$$\frac{(1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)(1/\lambda_1 - 1/\lambda_3)(1/\lambda_2 - 1/\lambda_3)}{(1 - z/\lambda_1)(1 - z/\lambda_2)(1 - z/\lambda_3)} = \frac{(1/\lambda_2 - 1/\lambda_3)/\lambda_1^2}{1 - z/\lambda_1} + (231) + (312)$$

где два последних члена в правой части получаются из первого циклическими перестановками индексов ($1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$) и ($1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$). Применив теперь (2.53), получим фундаментальное соотношение

$$\boxed{(\lambda_2 - \lambda_3)\, \tau(\mathbf{t} - [\lambda_1^{-1}])\, \tau(\mathbf{t} - [\lambda_2^{-1}] - [\lambda_3^{-1}]) + (231) + (312) = 0} \tag{2.60}$$

которому удовлетворяет τ-функция иерархии КП. Оно может быть прочитано как разностное уравнение на функцию

$$\tau(p_1, p_2, p_3) := \tau(\mathbf{t} - p_1[\lambda_1^{-1}] - p_2[\lambda_2^{-1}] - p_3[\lambda_3^{-1}])$$

(такая запись означает, что аргументами в правой части служат $t_k - (p_1\lambda_1^{-k} + p_2\lambda_2^{-k} + p_3\lambda_3^{-k})/k$) и в этой форме называется билинейным разностным уравнением Хироты:

$$\boxed{(\lambda_2 - \lambda_3)\, \tau(p_1 + 1, p_2, p_3)\, \tau(p_1, p_2 + 1, p_3 + 1) + (231) + (312) = 0} \tag{2.61}$$

Если забыть о происхождении функции $\tau(p_1, p_2, p_3)$, описанном выше, это уравнение можно понимать либо как уравнение на функцию от дискретных переменных p_j, принимающих целые значения, либо как разностное уравнение на функцию от вещественных или комплексных переменных p_j. Оно является интегрируемым разностным аналогом уравнения КП.

Уравнение (2.61) можно представить в нескольких различных формах. Остановимся на двух из них.

T-система. Линейная замена переменных $x_1 = p_2 + p_3$, $x_2 = p_1 + p_3$, $x_3 = p_1 + p_2$ позволяет привести уравнение (2.61) к виду

$$z_1 T(x_1+1)T(x_1-1) + z_2 T(x_2+1)T(x_2-1) + z_3 T(x_3+1)T(x_3-1) = 0 \qquad (2.62)$$

где $T(x_1, x_2, x_3) = \tau(p_1, p_2, p_3)$ при условии, что x_i и p_i связаны указанными выше линейными соотношениями. Для краткости в уравнении (2.62) выписаны явно только те аргументы, которые сдвигаются, т.е., например, $T(x_1 + 1) = T(x_1 + 1, x_2, x_3)$ и т.д. Константы z_i можно подчинить условию $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (тогда $T = 1$ будет простейшим решением), но можно считать их произвольными, либо вообще равными 1, что достигается простым преобразованием T-функции

$$T(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow z_1^{-x_1^2/2}\, z_2^{-x_2^2/2}\, z_3^{-x_3^2/2}\, T(x_1, x_2, x_3)$$

Уравнение (2.62) именно в этой форме было предложено Р.Хиротой в 1981 году в качестве универсальной интегрируемой дискретизации солитонных уравнений. Оно, как и уравнение (2.61), тоже называется билинейным разностным уравнением Хироты. Иногда используется более современное его название – T-система (оно дано по аналогии с возникшей независимо Y-системой, которая является следствием (2.62) и о которой будет рассказано чуть ниже). Большинство (если не все) известные солитонные уравнения получаются из (2.62) различными редукциями, пределами, заменами переменных и тому подобными операциями, причем сразу вместе со своими интегрируемыми разностными аналогами. Связь T-функции с τ-функцией иерархии КП была открыта Т.Мивой.

Y-система. Обратим внимание на то, что если $T(x_1, x_2, x_3)$ – решение уравнения (2.62), то

$$f_0(x_1+x_2+x_3) f_1(-x_1+x_2+x_3) f_2(x_1-x_2+x_3) f_3(x_1+x_2-x_3) T(x_1, x_2, x_3)$$

где f_i – произвольные функции, – тоже решение. Введем новую неизвестную функцию

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \frac{T(x_1, x_2, x_3+1)T(x_1, x_2, x_3-1)}{T(x_1+1, x_2, x_3)T(x_1-1, x_2, x_3)} \qquad (2.63)$$

которая, как легко проверить, остается инвариантной при умножении T-функций на функции f_i, как выше. Из уравнения Хироты для T следует уравнение для Y:

$$Y(x_1, x_2+1, x_3)Y(x_1, x_2-1, x_3) = \frac{(1+Y(x_1, x_2, x_3+1))(1+Y(x_1, x_2, x_3-1))}{(1+Y^{-1}(x_1+1, x_2, x_3))(1+Y^{-1}(x_1-1, x_2, x_3))} \qquad (2.64)$$

которое называется Y-системой.

2.9.2 Вспомогательные линейные задачи для уравнения Хироты

Вернемся к уравнению (2.61) и для краткости положим

$$\tau(p_1+1, p_2, p_3) := \tau_1, \quad \tau(p_1, p_2+1, p_3) := \tau_2, \quad \tau(p_1+1, p_2+1, p_3) := \tau_{12}, \quad \text{и т. д.},$$

а также $\tau(p_1+2,p_2,p_3) := \tau_{11}$ и т. д. Пусть $\alpha\beta\gamma$ означает любую циклическую перестановку индексов 123. Рассмотрим следующую систему трех линейных уравнений на функцию $\psi = \psi(p_1,p_2,p_3)$:

$$\left(e^{\partial_\alpha} + z_\gamma \frac{\tau\,\tau_{\alpha\beta}}{\tau_\alpha\tau_\beta}\right)\psi = e^{\partial_\beta}\psi\,, \quad \alpha\beta\gamma = 123,\ 231,\ 312, \tag{2.65}$$

где z_α – некоторые параметры и $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial_{p_\alpha}$. Нетрудно убедиться, что из совместности этих уравнений вытекает уравнение Хироты для τ:

$$z_1\tau_1\tau_{23} + z_2\tau_2\tau_{13} + z_3\tau_3\tau_{12} = 0\,. \tag{2.66}$$

В самом деле, возьмем, например, второе и третье уравнения и перепишем их в виде

$$\psi(p_1+1) = \psi(p_3+1) + z_2\frac{\tau\tau_{13}}{\tau_1\tau_3}\,\psi$$

$$\psi(p_2+1) = \psi(p_3+1) - z_1\frac{\tau\tau_{23}}{\tau_2\tau_3}\,\psi$$

С помощью этих уравнений функция $\psi(p_1+1,p_2+1)$ может быть представлена как линейная комбинация функций $\psi(p_3)$, $\psi(p_3+1)$, $\psi(p_3+2)$ двумя разными способами. Совместность линейных задач означает, что результаты должны совпадать. Приравняв друг другу получающиеся выражения, мы видим, что члены, пропорциональные $\psi(p_3)$ и $\psi(p_3+2)$ сокращаются автоматически, а члены, пропорциональные $\psi(p_3+1)$, дают нетривиальное соотношение (при условии, что $\psi(p_3+1)$ не обращается в нуль):

$$z_2\frac{\tau_{133}\tau_3}{\tau_{13}\tau_{33}} - z_1\frac{\tau_{123}\tau_1}{\tau_{12}\tau_{13}} = z_2\frac{\tau_{123}\tau_2}{\tau_{12}\tau_{23}} - z_1\frac{\tau_{233}\tau_3}{\tau_{23}\tau_{33}}$$

которое означает, что

$$\frac{z_1\tau_1\tau_{23} + z_2\tau_2\tau_{13}}{\tau_{12}\tau_3}$$

является периодической функцией p_3 с периодом 1 и произвольной функцией от p_1, p_2. Поскольку никаких специальных свойств периодичности не предполагается, мы примем, что эта функция не зависит от p_3. Таким образом, приходим к соотношению

$$z_1\tau(p_1+1)\tau(p_2+1,p_3+1) + z_2\tau(p_2+1)\tau(p_1+1,p_3+1) = h(p_1,p_2)\tau(p_3+1)\tau(p_1+1,p_1+1)$$

где h может быть произвольной функцией от p_1, p_2. Совместность с третьей линейной задачей означает, что h должна быть константой, равной $-z_3$, откуда и следует уравнение Хироты. В случае, когда функция h может быть зафиксирована каким-либо другим способом (например, из граничных условий), для представления уравнения Хироты в виде дискретного условия нулевой кривизны достаточно двух линейных уравнений.

Замечание. Вообще говоря, совместность линейных задач следует из наличия непрерывного семейства общих решений. В нашем случае структура коэффициентных функций в разностных операторах (2.65) такова, что совместность эквивалентна наличию *по крайней мере одного* нетривиального общего решения.

Введем функцию $\varphi = \psi\tau$, тогда линейные задачи приобретут вид

$$\tau_\gamma \varphi_\beta - \tau_\beta \varphi_\gamma + z_\alpha \tau_{\beta\gamma} \varphi = 0\,, \qquad \alpha\beta\gamma = 123,\ 231,\ 312\,. \tag{2.67}$$

Из первого и второго уравнений имеем

$$\tau_2 = \frac{\tau_3\varphi_2 + z_1\tau_{23}\varphi}{\varphi_3}\,, \quad \tau_1 = \frac{\tau_3\varphi_1 - z_2\tau_{13}\varphi}{\varphi_3}\,.$$

Подставив это в уравнение Хироты, получим еще одну линейную задачу, совместную с предыдущими тремя:

$$z_1\tau_{23}\varphi_1 + z_2\tau_{13}\varphi_2 + z_3\tau_{12}\varphi_3 = 0\,. \tag{2.68}$$

Все четыре линейные задачи можно объединить в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_3 & -\tau_2 & z_1\tau_{23} \\ -\tau_3 & 0 & \tau_1 & z_2\tau_{13} \\ \tau_2 & -\tau_1 & 0 & z_3\tau_{12} \\ -z_1\tau_{23} & -z_2\tau_{13} & -z_3\tau_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi \end{pmatrix} = 0\,. \tag{2.69}$$

Детерминант антисимметричной матрицы в левой части равен $(z_1\tau_1\tau_{23} + z_2\tau_2\tau_{13} + z_3\tau_3\tau_{12})^2$. Он обращается в 0 если τ удовлетворяет уравнению Хироты, причем ранг матрицы в этом случае равен 2, так что только два из четырех уравнений линейно независимы.

На систему (2.67) можно смотреть как на систему линейных уравнений для τ с коэффициентными функциями φ. Сдвинув переменные $p_\beta \to p_\beta - 1$, $p_\gamma \to p_\gamma - 1$, и перейдя к новым переменным $p_{1,2,3} \to -p_{1,2,3}$, видим, что вид этой системы остается таким же. Поскольку уравнение Хироты инвариантно относительно одновременного изменения знаков всех переменных, условие совместности дает такое же уравнение Хироты для φ такого же вида:

$$z_1\varphi_{23}\varphi_1 + z_2\varphi_{13}\varphi_2 + z_3\varphi_{12}\varphi_3 = 0\,. \tag{2.70}$$

Перейдем к новым переменным x_1, x_2, x_3 в соответствии с формулами

$$p_1 = \tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3)$$

$$p_2 = \tfrac{1}{2}(\ \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3)$$

$$p_3 = \tfrac{1}{2}(\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 - \varepsilon_3 x_3)\,,$$

Здесь $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ – некоторый фиксированный набор знаков (всего существует $2^3 = 8$ возможных выборов). Обратное преобразование дается формулами

$$x_1 = \varepsilon_1(p_2 + p_3)\,, \quad x_2 = \varepsilon_2(p_1 + p_3)\,, \quad x_3 = \varepsilon_3(p_1 + p_2)\,.$$

Введем функции $T(x_1,x_2,x_3)=\tau(p_1,p_2,p_3)$ и $F(x_1,x_2,x_3)=\varphi(p_1,p_2,p_3)$, причем переменные x_α и p_α связаны данными выше формулами. В новых переменных система четырех линейных задач выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & -T_{13} & z_1T_{1123} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} & z_2T_{1223} \\ T_{13} & -T_{23} & 0 & z_3T_{1233} \\ -z_1T_{1123} & -z_2T_{1223} & -z_3T_{1233} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{23} \\ F_{13} \\ F_{12} \\ F \end{pmatrix} = 0\,, \qquad (2.71)$$

где $T_1\equiv T(x_1{+}\varepsilon_1,x_2,x_3)$, $T_{12}\equiv T(x_1{+}\varepsilon_1,x_2{+}\varepsilon_2,x_3)$, $T_{1123}\equiv T(x_1{+}2\varepsilon_1,x_2{+}\varepsilon_2,x_3{+}\varepsilon_3)$, и т.д. (и аналогично для F).

Совместность этих линейных задач влечет уравнение Хироты

$$z_1T_{1123}T_{23}+z_2T_{1223}T_{13}+z_3T_{1233}T_{12}=0\,.$$

После сдвига переменных $x_\alpha\to x_\alpha-\varepsilon_\alpha$ имеем уравнение

$$z_1T(x_1{+}\varepsilon_1,x_2,x_3)T(x_1{-}\varepsilon_1,x_2,x_3)+z_2T(x_1,x_2{+}\varepsilon_2,x_3)T(x_1,x_2{-}\varepsilon_2,x_3)$$
$$+\;z_3T(x_1,x_2,x_3{+}\varepsilon_3)T(x_1,x_2,x_3{-}\varepsilon_3)=\;0$$

Заметим, что его вид не зависит от выбора знаков ε и совпадает с (2.62). Системы линейных уравнений (2.71) дают различные преобразования Бэклунда для него. Однако только четыре из них (соответствующие, например, выборам знаков $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, $-\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, $\varepsilon_1=-\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-\varepsilon_3=1$) действительно различны, поскольку одновременное изменение всех знаков означает переход к сопряженной системе линейных задач, в которой T и F меняются ролями.

2.9.3 Непрерывный (бездисперсионный) предел уравнения Хироты

Билинейное разностное уравнение Хироты допускает различные непрерывные пределы. Как мы знаем, один из них порождает уравнение КП вместе со всей иерархией. Здесь мы опишем другой непрерывный предел, который приводит к так называемому бездисперсионному аналогу иерархии КП.

Начнем с того, что введем малый параметр ϵ и переопределим времена и τ-функцию следующим образом:

$$t_k=\frac{T_k}{\epsilon}\,,\qquad \tau(t)=\tau_\epsilon(T) \qquad (2.72)$$

Введем также дифференциальный оператор

$$D(z)=\sum_{k\geq 1}\frac{z^{-k}}{k}\,\partial_{T_k} \qquad (2.73)$$

который является своего рода “производящей функцией” векторных полей ∂_{T_k}. При этом уравнение (2.60) перепишется в виде

$$(\lambda_2-\lambda_3)\left(e^{-\epsilon D(\lambda_1)}\tau_\epsilon\right)\left(e^{-\epsilon(D(\lambda_2)+D(\lambda_3))}\tau_\epsilon\right)+(231)+(312)=0 \qquad (2.74)$$

Параметр ϵ играет роль постоянной решетки. Бездисперсионный предел хорошо определен на классе решений, для которых существует конечный предел

$$F(T)=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log\tau_\epsilon(T) \qquad (2.75)$$

т.е. таких, что τ-функция $\tau_\epsilon(T)$ в пределе $\epsilon\to 0$ ведет себя как $e^{F(T)/\epsilon^2}$, где $F(T)$ – некоторая функция переменных T_k. Если предел существует, она иногда называется бездисперсионной τ-функцией, хотя на самом деле является пределом ее перескалированного логарифма. Сама же τ-функция в этом пределе не имеет смысла, т.к. выражение $\tau_\epsilon=e^{F/\epsilon^2}$ не определено при $\epsilon=0$. Отметим, что солитонные решения не имеют бездисперсионного предела (что и понятно, поскольку само существование солитона – это эффект, обусловленный ненулевой дисперсией).

Задача. Привести пример решения, имеющего бездисперсионный предел.

Подставив в уравнение (2.74) $\tau_\epsilon=e^{F/\epsilon^2}$, получим

$$(\lambda_2-\lambda_3)e^{\epsilon^{-2}e^{-\epsilon D(\lambda_1)}F}e^{\epsilon^{-2}e^{-\epsilon(D(\lambda_2)+D(\lambda_3)}F}+(231)+(312)=0$$

Разложение при $\epsilon\to 0$ дает следующее соотношение на F:

$$(\lambda_1-\lambda_2)e^{D(\lambda_1)D(\lambda_2)F}+(\lambda_2-\lambda_3)e^{D(\lambda_2)D(\lambda_3)F}+(\lambda_3-\lambda_1)e^{D(\lambda_1)D(\lambda_3)F}=0 \qquad (2.76)$$

которое называется бездисперсионным аналогом иерархии КП в форме Хироты. Устремив $\lambda_3\to\infty$ в этом соотношении, будем иметь:

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left(1-e^{D(\lambda_1)D(\lambda_2)F}\right)=(D(\lambda_1-D(\lambda_2))\partial_{t_1}F$$

или

$$D(\lambda_1)D(\lambda_2)F=\log\frac{p(\lambda_1)-p(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2} \qquad (2.77)$$

где

$$p(\lambda)=\lambda-\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{-k}}{k}F_{1k}\,,\quad F_{ik}:=\partial_{t_i}\partial_{t_k}F$$

На самом деле соотношение (2.77) полностью эквивалентно (2.76), поскольку последнее получается из первого применением функции exp, умножением на $\lambda_1-\lambda_2$ и суммированием трех таких уравнений (для пар $\{\lambda_1,\lambda_2\}$, $\{\lambda_2,\lambda_3\}$ и $\{\lambda_3,\lambda_1\}$). Из (2.77) видно, что эти соотношения выражают F_{ij} с $i,j\geq 2$ через F_{1j}, $j\geq 1$.

3 Тау-функции как вакуумные средние фермионных операторов

Тау-функции выделяются среди всех функций от бесконечного количества переменных тем, что они удовлетворяют совокупности билинейных уравнений Хироты (2.58) (или билинейному разностному уравнению Хироты (2.60)). Выдающимся открытием японской школы (М.Сато, М.Джимбо, Т.Мива и др.) стала другая, эквивалентная характеризация τ-функций как вакуумных средних от операторов специального вида, составленных из свободных фермионов.

3.1 Фермионные операторы

Введем фермионные операторы ψ_n, ψ_n^*, $n \in \mathbb{Z}$ со стандартными (анти)коммутационными соотношениями $[\psi_n, \psi_m]_+ = [\psi_n^*, \psi_m^*]_+ = 0$, $[\psi_n, \psi_m^*]_+ = \delta_{mn}$. Они порождают бесконечномерную алгебру Клиффорда. Будем использовать также их преобразования Фурье

$$\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k, \qquad \psi^*(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k^* z^{-k} \tag{3.1}$$

которые имеют смысл фермионных полей в плоскости комплексной переменной z. (Мы надеемся, что стандартное обозначение $\psi(z)$ для фермионного поля не приведет к путанице с функцией Бейкера-Ахиезера, которую будем обозначать $\psi(t, z)$.)

Из того, что антикоммутатор любых линейных комбинаций фермионных операторов – число, следует, что коммутатор любых билинейных выражений по ψ_n и ψ_n^* снова билинеен по ψ_n и ψ_n^*. Например,

$$[\psi_m \psi_n^*,\, \psi_{m'} \psi_{n'}^*] = \delta_{nm'} \psi_m \psi_{n'}^* - \delta_{mn'} \psi_{m'} \psi_n^*$$

Мы видим, что выражения $\psi_m \psi_n^*$ коммутируют так же, как матрицы $E^{(mn)}$ с матричными элементами $E_{ij}^{(mn)} = \delta_{im}\delta_{jn}$, которые являются генераторами алгебры $gl(\infty)$ матриц бесконечного размера, имеющих только конечное (но произвольное) число ненулевых элементов. Более общо, рассмотрим билинейное по фермионам выражение

$$X_A = \sum_{ij} A_{ij} \psi_i \psi_j^* \tag{3.2}$$

с некоторой матрицей A, тогда $[X_A,\, X_B] = X_{[A,B]}$, и

$$[X_A,\, \psi_n] = \sum_i A_{in} \psi_i\,, \qquad [X_A,\, \psi_n^*] = -\sum_i A_{ni} \psi_i^*$$

Для того, чтобы найти присоединенное действие оператора X_A на фермионах, воспользуемся полезной формулой

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \ldots \tag{3.3}$$

справедливой для любых двух операторов A, B.

Задача. Доказать формулу (3.3). (Указание: рассмотреть $C(t) = e^{tA} B e^{-tA}$ и убедиться, что разложения в ряд Тейлора по t обеих частей формулы (3.3) совпадают.)

Мы получим:

$$e^{X_A}\psi_n e^{-X_A} = \sum_i \psi_i\, R_{in}$$
$$e^{X_A}\psi_n^* e^{-X_A} = \sum_i (R^{-1})_{ni}\psi_i^* \tag{3.4}$$

где матрица R связана с матрицей A соотношением $R = e^A$.

Тем самым экспоненты от выражений, билинейных по ψ_n и ψ_n^*, обладают весьма специальным свойством - результат их присоединенного действия на линейные по фермионам выражения, снова линейны по фермионам. Можно сказать, что элементы G вида

$$G = \exp\left(\sum_{ij} A_{ij}\psi_i\psi_j^*\right) \tag{3.5}$$

осуществляют "вращение" в пространстве фермионных операторов:

$$G\psi_n = \sum_i \psi_i G R_{in}$$
$$\psi_n^* G = \sum_i G\psi_i^* R_{ni} \tag{3.6}$$

Отметим, что "вращение" оператора ψ_n^* осуществляется матрицей, которая обратна к транспонированной матрице вращения для ψ_n.

Задача. Показать, что операторы вида (3.5) обладают свойством групповой композиции: $e^{X_A}e^{X_B} = e^{X_C}$, где матрица C определяется соотношением $e^C = e^A e^B$.

Будем называть элементы G вида (3.5) элементами группы Клиффорда $\mathcal{G}_{\text{Cliff}}$ (это название не совсем точно, поскольку алгебру Клиффорда образуют все, а не только билинейные комбинации фермионных операторов, но оно использовалось в оригинальных работах М.Сато, М.Джимбо, Т.Мива и др.). В силу сказанного выше она изоморфна бесконечномерной группе $GL(\infty)$. С некоторыми оговорками определение группы Клиффорда может быть расширено на класс матриц A_{ij} в (3.5) с бесконечным числом ненулевых элементов (но таких, что $A_{ij} = 0$ при достаточно больших $|i-j|$).

3.2 Пространство состояний и базис

Введем вакуумное состояние $|0\rangle$ – "море Дирака", в котором все однофермионные состояния с отрицательными n свободны, а с положительными – заняты:

$$\psi_n\,|0\rangle = 0, \quad n < 0; \qquad \psi_n^*\,|0\rangle = 0, \quad n \geq 0$$

(для краткости здесь и далее будем называть индексы $n \geq 0$ положительными). По отношению к этому вакууму операторы ψ_n с $n < 0$ и ψ_n^* с $n \geq 0$ являются операторами уничтожения, а ψ_n^* с $n < 0$ и ψ_n с $n \geq 0$ – операторами рождения частицы и дырки соответственно. Можно также определить "сдвинутый" дираковский вакуум $|n\rangle$:

$$|n\rangle = \begin{cases} \psi_{n-1}\ldots\psi_1\psi_0\,|0\rangle\,, & n > 0 \\ \psi_n^*\ldots\psi_{-2}^*\psi_{-1}^*\,|0\rangle\,, & n < 0 \end{cases}$$

Аналогично вводятся дуальные вакуумные состояния (векторы из двойственного гильбертова пространства):

$$\langle 0|\,\psi_n^* = 0, \quad n < 0; \qquad \langle 0|\,\psi_n = 0, \quad n \geq 0.$$

и

$$\langle n| = \begin{cases} \langle 0|\,\psi_0^*\psi_1^* \ldots \psi_{n-1}^*, & n > 0 \\ \\ \langle 0|\,\psi_{-1}\psi_{-2} \ldots \psi_n, & n < 0 \end{cases}$$

Мы имеем:

$$\psi_m\,|n\rangle = 0, \quad m < n; \qquad \psi_m^*\,|n\rangle = 0, \quad m \geq n,$$

$$\langle n|\,\psi_m = 0, \quad m \geq n; \qquad \langle n|\,\psi_m^* = 0, \quad m < n$$

а также

$$\psi_n\,|n\rangle = |n+1\rangle\,, \qquad \psi_n^*\,|n+1\rangle = |n\rangle\,,$$

$$\langle n+1|\,\psi_n = \langle n| \qquad \langle n|\,\psi_n^* = \langle n+1|\,.$$

В качестве базиса гильбертова пространства $\mathcal{H}_F$ состояний теории свободных фермионов можно взять все состояния, получающиеся из вакуума $|0\rangle$ применением конечного числа операторов рождения частиц и дырок. Считается, что частица (рожденная действием оператора ψ_n^*) несет заряд -1, а дырка (рожденная действием оператора ψ_n) $+1$, поэтому все базисные состояния имеют определенный заряд, равный разности числа дырок и частиц. Будем считать этот базис ортонормированным.

Теперь дадим более точное определение. Базисные состояния $|\lambda, n\rangle$ параметризуются целым числом n и диаграммой Юнга λ следующим образом. Пусть дана диаграмма Юнга $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ с $\ell = \ell(\lambda)$ ненулевыми строками. В обозначениях Фробениуса $\lambda = (\vec{\alpha}|\vec{\beta}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d(\lambda)}|\beta_1, \ldots, \beta_{d(\lambda)})$, где $d(\lambda)$ – число клеток на главной диагонали, и $\alpha_i = \lambda_i - i$, $\beta_i = \lambda_i' - i$. Здесь через λ' обозначена транспонированная диаграмма λ (отраженная относительно главной диагонали). Тогда базисные состояния и им дуальные определяются так:

$$\begin{aligned} |\lambda, n\rangle &:= \psi_{n-\beta_1-1}^* \ldots \psi_{n-\beta_{d(\lambda)}-1}^*\, \psi_{n+\alpha_{d(\lambda)}} \ldots \psi_{n+\alpha_1}\,|n\rangle\,, \\ \langle \lambda, n| &:= \langle n|\,\psi_{n+\alpha_1}^* \ldots \psi_{n+\alpha_{d(\lambda)}}^*\, \psi_{n-\beta_{d(\lambda)}-1} \ldots \psi_{n-\beta_1-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Состояние $|\lambda, n\rangle$ имеет заряд n по отношению к вакууму $|0\rangle$. Для пустой диаграммы положим $\langle \emptyset, n| = \langle n|$, $|\emptyset, n\rangle = |n\rangle$.

3.3 Вакуумные средние

Вакуумное среднее $\langle 0|\ldots|0\rangle$ представляет собой эрмитову линейную форму на алгебре Клиффорда, определяемую следующими свойствами: $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|\,\psi_n\psi_m\,|0\rangle = \langle 0|\,\psi_n^*\psi_m^*\,|0\rangle = 0$ для всех m, n, и

$$\langle 0|\,\psi_n\psi_m^*\,|0\rangle = \delta_{mn} \quad \text{для } m < 0, \qquad \langle 0|\,\psi_n\psi_m^*\,|0\rangle = 0 \quad \text{для } m \geq 0$$

Вакуумное среднее оператора с ненулевым зарядом равно 0.

Упражнение. Пользуясь коммутационными соотношениями для фермионных операторов и определением сдвинутого вакуума, доказать, что $\langle n|n\rangle = 1$, а также

$$\langle n|\, \psi_i \psi_j^* \,|n\rangle = \delta_{ij} \quad \text{for } j < n, \qquad \langle n|\, \psi_i \psi_j^* \,|n\rangle = 0 \quad \text{for } j \geq n.$$

для всех i, j и n.

Скалярное произведение в фермионном фоковском пространстве $\mathcal{H}_F$ вводится как вакуумное среднее от произведения операторов, рождающих данные состояния из вакуума. При этом базисные векторы (3.7) будут ортонормальны:

$$\langle \lambda, n|\, \mu, m\rangle = \delta_{mn}\delta_{\lambda\mu}.$$

Это можно увидеть, перемещая операторы $\psi_{n-\beta_i-1}$ направо с учетом того, что последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d$ строго убывающие.

В общем случае вакуумные средние произведений фермионных операторов даются теоремой Вика. Пусть $v_i = \sum_j v_{ij}\psi_j$ – произвольные линейные комбинации операторов ψ_j, а $w_i^* = \sum_j w_{ij}^* \psi_j^*$ – операторов ψ_j^*. В простейшей форме теорема Вика гласит, что

$$\langle n|\, v_1 \ldots v_m w_m^* \ldots w_1^* \,|n\rangle = \det_{i,j=1,\ldots,m} \langle n|\, v_i w_j^* \,|n\rangle\,,$$

$$\langle n|\, w_1^* \ldots w_m^* v_m \ldots v_1 \,|n\rangle = \det_{i,j=1,\ldots,m} \langle n|\, w_i^* v_j \,|n\rangle\,.$$

Ее можно доказать по индукции. Мы не будем этого сейчас делать, т.к. позднее дадим доказательство более общего утверждения.

Для фермионных полей $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ имеем:

$$\langle n|\, \psi^*(\zeta)\psi(z) \,|n\rangle = \sum_{j,k} \zeta^{-j} z^k \langle n|\, \psi_j^* \psi_k \,|n\rangle = \sum_{k\geq n} (z/\zeta)^k = \frac{z^n \zeta^{1-n}}{\zeta - z}$$

(в предположении, что $|\zeta| > |z|$) и

$$\langle n|\, \psi(z)\psi^*(\zeta) \,|n\rangle = \sum_{j,k} \zeta^{-j} z^k \langle n|\, \psi_k \psi_j^* \,|n\rangle = \sum_{k<n} (z/\zeta)^k = \frac{z^n \zeta^{1-n}}{z - \zeta}$$

(в предположении, что $|z| > |\zeta|$).

Задача. Вывести формулу

$$\begin{aligned} \langle n|\, \psi^*(\zeta_1) \ldots \psi^*(\zeta_m)\psi(z_m) \ldots \psi(z_1) \,|n\rangle &= \prod_{l=1}^{m} (z_l/\zeta_l)^n \cdot \det_{i,j} \frac{\zeta_i}{\zeta_i - z_j} \\ &= \frac{\prod\limits_{i<i'} (z_i - z_{i'}) \prod\limits_{j>j'} (\zeta_j - \zeta_{j'})}{\prod\limits_{i,j} (\zeta_i - z_j)} \prod_l z_l^n \zeta_l^{1-n} \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.4 Нормальное упорядочение

Полезным является понятие нормального упорядочения операторов. Чтобы его ввести, надо зафиксировать вакуумное состояние Нормальное упорядочение $:(\ldots):$ по отношению к дираковскому вакууму $|0\rangle$ определяется следующим образом: все операторы уничтожения передвигаются направо, а все операторы рождения – налево, с учетом того, что всякий раз, когда соседние фермионные операторы меняются местами, возникает знаковый фактор (-1). Например: $:\psi_1^*\psi_1: = -\psi_1\psi_1^*$, $:\psi_{-1}\psi_0: = -\psi_0\psi_{-1}$, $:\psi_2\psi_1^*\psi_1\psi_{-2}^*: = \psi_2\psi_1\psi_{-2}^*\psi_1^*$, и т. д.

Задача. Доказать тождество $e^{\alpha\psi_k\psi_k^*} = 1 + (e^\alpha - 1)\psi_k\psi_k^* = :e^{(e^\alpha-1)\psi_k\psi_k^*}:, \quad k \geq 0.$

Под знаком нормального упорядочения (н. у.) все фермионные операторы, как ψ_j, так и ψ_j^*, антикоммутируют. Другими словами, соотношения алгебры Клиффорда под знаком н. у. не верны, т.е., например, $:\psi_1^*\psi_1: \neq :(1 - \psi_1\psi_1^*):$.

Используя н. у., можно ввести оператор заряда Q:

$$Q = \sum_{k\in\mathbb{Z}} :\psi_k\psi_k^*: \tag{3.9}$$

Этот оператор считает заряд состояния: $Q\,|\lambda, n\rangle = n\,|\lambda, n\rangle$, и потому $\langle\mu, m|\,Q\,|\lambda, n\rangle = n\delta_{nm}\delta_{\lambda\mu}$ (отметим, что без н. у. этот матричный элемент плохо определен!). Оператор Q имеет коммутационные соотношения $[Q, \psi_n] = \psi_n$, $[Q, \psi_n^*] = -\psi_n^*$, которые означают, что ψ_n, ψ_n^* имеют заряды ± 1. Более общо, будем говорить, что элемент алгебры Клиффорда X имеет заряд q, если $[Q, X] = qX$.

Определение н. у. тесно связано с определением вакуумного среднего.

Упражнение. Проверить, что $:\psi_k^*\psi_l: = \psi_k^*\psi_l - \langle 0|\,\psi_k^*\psi_l\,|0\rangle$.

Более общо, для любых линейных комбинаций $f_0, f_1, \ldots, f_m$ фермионных операторов ψ_i, ψ_j^* имеет место рекуррентная формула

$$f_0 :f_1 f_2 \ldots f_m: = :f_0 f_1 f_2 \ldots f_m: + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \langle 0|\, f_0 f_j\,|0\rangle :f_1 f_2 \ldots \not{f_j} \ldots f_m: \tag{3.10}$$

где $\not{f_j}$ означает, что этот фактор должен быть опущен. Это соотношение позволяет выразить н. у. мономы с любым числом фермионных операторов как линейные комбинации мономов без н. у. и наоборот.

Аналогичным образом можно определить н. у. по отношению к любому вакууму. Например, можно рассмотреть пустой (незаполненный) вакуум $|\infty\rangle$. По отношению к этому вакууму все ψ_j являются операторами уничтожения, а все ψ_j^* – операторами рождения. Обозначим соответствующее н. у. символом ${}^\times_\times(\ldots){}^\times_\times$. Примеры: ${}^\times_\times\psi_m^*\psi_n{}^\times_\times = \psi_m^*\psi_n$, ${}^\times_\times\psi_n\psi_m^*{}^\times_\times = -\psi_m^*\psi_n$ и

$${}^\times_\times \exp\Big(\sum_{ik} B_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big){}^\times_\times = 1 + \sum_{i,k} B_{ik}\psi_i^*\psi_k + \frac{1}{2!}\sum_{i,i'k,k'} B_{ik}B_{i'k'}\psi_i^*\psi_{i'}^*\psi_{k'}\psi_k + \ldots \tag{3.11}$$

3.5 Групповые и квазигрупповые элементы алгебры Клиффорда

3.5.1 Групповые элементы

Билинейные комбинации $\sum_{mn} b_{mn}\psi^*_m\psi_n$ с определенными условиями на матрицу $b = (b_{mn})$ образуют бесконечномерную алгебру Ли. Экспоненцируя их, получим некоторую бесконечномерную группу (один из вариантов $GL(\infty)$). Элементы этой группы можно представить в виде

$$G = \exp\Big(\sum_{i,k\in\mathbb{Z}} b_{ik}\psi^*_i\psi_k\Big) \tag{3.12}$$

Обратный элемент записывается так же с матрицей $(-b_{ik})$.

Как уже было отмечено, групповые элементы вида (3.12) обладают весьма специальным свойством: присоединенное действие такого элемента переводит в себя линейное пространство, образованные линейными комбинациями фермионов ψ_n, и то же верно для ψ^*_n. Более точно, мы имеем:

$$G\psi^*_n G^{-1} = \sum_l \psi^*_l R_{ln}\,, \quad G\psi_n G^{-1} = \sum_l (R^{-1})_{nl}\psi_l$$

или

$$G\psi^*_n = \sum_l R_{ln}\psi^*_l G\,, \qquad \psi_n G = \sum_l R_{nl} G\psi_l\,, \tag{3.13}$$

с некоторой матрицей $R = (R_{nl})$.

Задача. Доказать, что $R = e^b$.

Отсюда ясно, что произведение групповых элементов также является элементом того же вида:

$$\exp\Big(\sum_{i,k\in\mathbb{Z}} b'_{ik}\psi^*_i\psi_k\Big)\exp\Big(\sum_{i,k\in\mathbb{Z}} b_{ik}\psi^*_i\psi_k\Big) = \exp\Big(\sum_{i,k\in\mathbb{Z}} b''_{ik}\psi^*_i\psi_k\Big) \tag{3.14}$$

где $e^{b'}e^b = e^{b''}$.

Ясно также, что умножение G вида (3.12) на любое комплексное число сохраняет характеристическое свойство (3.13). Из того факта, что центр алгебры Клиффорда – это поле комплексных чисел c, следует, что два групповых элемента G, G' с одной и той же матрицей линейного преобразования R могут отличаться только числовым множителем: $G' = cG$.

Групповые элементы могут быть также представлены как *нормально упорядоченные* экспоненты от билинейных форм. Например, можно легко проверить, что $G = {}^\times_\times e^{B_{ik}\psi^*_i\psi_k}{}^\times_\times$ (здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам) удовлетворяет первому соотношению (3.13) с $R_{ln} = \delta_{ln} + B_{ln}$:

$${}^\times_\times e^{B_{ik}\psi^*_i\psi_k}{}^\times_\times \psi^*_n = \Big(1 + B_{a_1b_1}\psi^*_{a_1}\psi_{b_1} + \tfrac{1}{2!}B_{a_1b_1}B_{a_2b_2}\psi^*_{a_1}\psi^*_{a_2}\psi_{b_2}\psi_{b_1} + \ldots\Big)\psi^*_n$$

$$= \psi^*_n {}^\times_\times e^{B_{ik}\psi^*_i\psi_k}{}^\times_\times + B_{a_1n}\psi^*_{a_1} + B_{a_1n}B_{a_2b_2}\psi^*_{a_1}\psi^*_{a_2}\psi_{b_2} + \tfrac{1}{2!}B_{a_1n}B_{a_2b_2}B_{a_3b_3}\psi^*_{a_1}\psi^*_{a_2}\psi^*_{a_3}\psi_{b_3}\psi_{b_2} + \ldots$$

$$= \psi^*_n {}^\times_\times e^{B_{ik}\psi^*_i\psi_k}{}^\times_\times + B_{an}\psi^*_a {}^\times_\times e^{B_{ik}\psi^*_i\psi_k}{}^\times_\times \;=\; (\delta_{an} + B_{an})\psi^*_a {}^\times_\times e^{B_{ik}\psi^*_i\psi_k}{}^\times_\times$$

Упражнение. Доказать второе соотношение (3.13).

Аналогичным образом можно показать, что

$$\exp\Big(b_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) = {}^{\times}_{\times} \exp\Big((e^b - I)_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) {}^{\times}_{\times} \tag{3.15}$$

где I означает единичную матрицу. Закон композиции имеет вид

$$ {}^{\times}_{\times} \exp\Big(B'_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) {}^{\times}_{\times} {}^{\times}_{\times} \exp\Big(B_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) {}^{\times}_{\times} = {}^{\times}_{\times} \exp\Big((B+B'+B'B)_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) {}^{\times}_{\times} \tag{3.16}$$

что прямо следует из закона композиции (3.14) и соотношения $B = e^b - I$.

Докажем другую полезную формулу, которая позволяет представить групповой элемент как н. у. экспоненту по отношению к различным вакуумам:

$$ {}^{\times}_{\times} \exp\Big(B_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) {}^{\times}_{\times} = \det(I+P_+B) \boldsymbol{:} \exp\Big(A_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) \boldsymbol{:} \tag{3.17}$$

или, что эквивалентно,

$$ \boldsymbol{:} \exp\Big(A_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) \boldsymbol{:} = \det(I-P_+A) {}^{\times}_{\times} \exp\Big(B_{ik}\psi_i^*\psi_k\Big) {}^{\times}_{\times} \tag{3.18}$$

Здесь P_+ – проектор на пространство положительных мод ($(P_+)_{ik} = \delta_{ik}$ при $i, k \geq 0$ и 0 в противном случае), а матрицы A, B связаны соотношениями

$$B - A = AP_+B\,, \quad \text{i.e.,} \quad B = (I - AP_+)^{-1}A \quad \text{or} \quad A = B(I+P_+B)^{-1} \tag{3.19}$$

Для доказательства сначала заметим, что мы можем представить $\boldsymbol{:} e^{A_{ik}\psi_i^*\psi_k} \boldsymbol{:}$ как композицию трех операторов:

$$\boldsymbol{:} e^{A_{ik}\psi_i^*\psi_k} \boldsymbol{:} = \underbrace{e^{A_{\bar{a}b}\psi_{\bar{a}}^*\psi_b}}_{G_1} \cdot \underbrace{\boldsymbol{:} e^{A_{ab}\psi_a^*\psi_b} \cdot e^{A_{\bar{a}\bar{b}}\psi_{\bar{a}}^*\psi_{\bar{b}}} \boldsymbol{:}}_{G_2} \cdot \underbrace{e^{A_{a\bar{b}}\psi_a^*\psi_{\bar{b}}}}_{G_3}$$

где в правой части повторяющиеся индексы a, b ($\bar{a}, \bar{b}$) подразумевают суммирование по неотрицательным (соответственно отрицательным) целым числам (суммирование по повторяющимся индексам i, k в левой части идет по всем целым). Оператор G_1 содержит только операторы рождения, а G_3 – только операторы уничтожения. Заметим также, что два оператора, стоящие под знаком н. у., коммутируют друг с другом. Нетрудно найти линейные преобразования, которые осуществляют G_1, G_2, G_3. Для G_1, G_3 это особенно просто:

$$\psi_n G_1 = G_1 \begin{cases} \psi_n + A_{nb}\psi_b\,, & n < 0 \\ \psi_n\,, & n \geq 0 \end{cases} \qquad \psi_n G_3 = G_3 \begin{cases} \psi_n\,, & n < 0 \\ \psi_n + A_{n\bar{b}}\psi_{\bar{b}}\,, & n \geq 0 \end{cases}$$

В случае G_2 пишем $G_2 = \boldsymbol{:} G_2^+ G_2^- \boldsymbol{:}$ с $G_2^+ = e^{A_{ab}\psi_a^*\psi_b}$, $G_2^- = e^{A_{\bar{a}\bar{b}}\psi_{\bar{a}}^*\psi_{\bar{b}}}$. При проносе ψ_n через этот элемент, можно проигнорировать либо G_2^+, либо G_2^-, в зависимости от того, отрицательно или положительно n. Оставшееся вычисление совершенно аналогично вычислению с н. у. ${}^{\times}_{\times}(\ldots){}^{\times}_{\times}$, проделанному выше. Оно дает:

$$\begin{cases} \psi_n G_2 = G_2(\psi_n + A_{n\bar{b}}\psi_{\bar{b}}), & n < 0 \\[2ex] G_2\psi_n = (\psi_n - A_{nb}\psi_b)G_2, & n \geq 0 \end{cases}$$

Полезно переписать эти преобразования в блочно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \psi_- G_1 \\ \psi_+ G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_+^- \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \psi_- \\ G_1 \psi_+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_- G_3 \\ \psi_+ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_-^+ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_3 \psi_- \\ G_3 \psi_+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_- G_2 \\ \psi_+ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + A_-^- & 0 \\ 0 & (I - A_+^+)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_2 \psi_- \\ G_2 \psi_+ \end{pmatrix}$$

(в предположении, что матрица I–A_+^+ обратима). В этих обозначениях $P_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Полная матрица преобразования получается как произведение этих трех:

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} I & A_+^- \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + A_-^- & 0 \\ 0 & (I - A_+^+)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_-^+ & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_-^- + A_+^-(I - A_+^+)^{-1} A_-^+ & A_+^-(I - A_+^+)^{-1} \\ (I - A_+^+)^{-1} A_-^+ & (I - A_+^+)^{-1} A_+^+ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Можно проверить, что вторая матрица в последней строчке (которая есть $R - I = B$) равна в точности $(I - AP_+)^{-1} A$ в согласии с (3.19). Остается найти скалярный множитель в (3.18). Вычислим вакуумное среднее от обеих частей по отношению к голому (пустому) вакууму. Тогда мы должны показать, что

$$\langle \infty | \, {:} \exp\Big(A_{ik} \psi_i^* \psi_k \Big) {:} \, | \infty \rangle = \det(I - P_+ A)$$

Используя представление оператора в левой части в виде композиции трех, имеем:

$$\langle \infty | \, {:} e^{A_{ik} \psi_i^* \psi_k} {:} \, | \infty \rangle = \langle \infty | \, {:} e^{-A_{ab} \psi_b \psi_a^*} {:} \, | \infty \rangle$$

$$= \sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k}{k!} A_{a_1 b_1} \dots A_{a_k b_k} \, \langle \infty | \, \psi_{b_1} \dots \psi_{b_k} \psi_{a_k}^* \dots \psi_{a_1}^* \, | \infty \rangle$$

$$= \sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{a_1, \dots, a_k \ge 0} \begin{vmatrix} A_{a_1 a_1} & A_{a_1 a_2} & \dots & A_{a_1 a_k} \\ A_{a_2 a_1} & A_{a_2 a_2} & \dots & A_{a_2 a_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{a_k a_1} & A_{a_k a_2} & \dots & A_{a_k a_k} \end{vmatrix}$$

$$= \det(I - A_+^+) = \det(I - P_+ A)$$

3.5.2 Квазигрупповые элементы

Использование н. у. позволяет представить в форме (3.4) не только групповые элементы, но и некоторые необратимые элементы алгебры Клиффорда, которые обладают свойством

$$G \psi_n^* = \sum_l R_{ln} \psi_l^* G \,, \qquad \psi_n G = \sum_l R_{nl} G \psi_l \,, \tag{3.20}$$

или

$$\psi_n^* G = \sum_l R'_{ln} G \psi_l^* \qquad G\psi_n = \sum_l R'_{nl} \psi_l \, G \tag{3.21}$$

с некоторыми (не обязательно обратимыми) матрицами R, R' (для необратимых элементов выполняется лишь какая-то одна пара из этих соотношений). Мы будем называть элемент G алгебры Клиффорда квазигрупповым, если выполяются коммутационные соотношения (3.20) или (3.21). Если матрица R необратима, необратим и элемент G. В этом случае его нельзя представить в экспоненциальной форме (3.12), но можно в виде н. у. экспоненты.

Пример. Пусть Ψ, Φ^* – произвольные линейные комбинации фермионных операторов ψ_n, ψ_n^* соответственно. Рассмотрим элемент

$$G = e^{\beta\Phi^*\Psi} = {}^{\times}_{\times} e^{\alpha\Phi^*\Psi} {}^{\times}_{\times} = 1 + \alpha\Phi^*\Psi = 1 + \alpha\gamma - \alpha\Psi\Phi^*,$$

где $\gamma := \langle\infty|\, \Psi\Phi^* \,|\infty\rangle$ и α, β связаны соотношением $e^{\gamma\beta} = 1 + \gamma\alpha$. При почти всех значениях α элемент G обратим, и два эти представления – с н. у. и без него – полностью эквивалентны. Однако, при $\alpha = -1/\gamma$ (в предположении, что $\gamma \neq 0$) $G = {}^{\times}_{\times} e^{\alpha\Phi^*\Psi} {}^{\times}_{\times}$ становится необратимым и принимает вид

$$G = \frac{\Psi\,\Phi^*}{\langle\infty|\Psi\Phi^*|\infty\rangle}.$$

3.6 Основное билинейное соотношение

Из (3.20) или (3.21) легко следует, что любой квазигрупповой элемент удовлетворяет коммутационному соотношению

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k G \otimes \psi_k^* G = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G\psi_k \otimes G\psi_k^*} \tag{3.22}$$

которое мы назовем основным билинейным соотношением (ОБС). Оно означает, что $G\otimes G$ коммутирует с $\sum_k \psi_k \otimes \psi_k^*$. В терминах матричных элементов ОБС гласит, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle U|\, \psi_k G \,|V\rangle \, \langle U'|\, \psi_k^* G \,|V'\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle U|\, G\psi_k \,|V\rangle \, \langle U'|\, G\psi_k^* \,|V'\rangle \tag{3.23}$$

для любых состояний $|V\rangle, |V'\rangle$, $\langle U|, \langle U'|$ из пространства $\mathcal{H}_F$ и дуального к нему. В самом деле, подставив (3.20) (или (3.21)) вместо $\psi_k G$ и $G\psi_k^*$ (или $\psi_k^* G$ и $G\psi_k$) в правой и левой части уравнения (3.22), получим тождество.

Оказывается, элементы G, удовлетворяющие ОБС, не исчерпываются нормально упорядоченными экспонентами. Легко, например, проверить, что $G = \psi_n$, а также $G = \psi_n^*$ удовлетворяют условию (3.22), но не являются н. у. экспонентами от чего бы то ни было. Кроме того, элемент $G = \psi_n$ не осуществляют линейного преобразования пространства с базисом ψ_k^* ни вида (3.20), ни вида (3.21). Класс подобных примеров можно существенно расширить.

Упражнение. Пусть Ψ, Φ^* – произвольные линейные комбинации фермионных операторов ψ_n, ψ_n^* соответственно. Проверить, что $G = \Psi$ и $G = \Phi^*$ удовлетворяют условию (3.22).

Отметим следующие два общих свойства элементов, удовлетворяющих ОБС.

Утверждение. *Элементы алгебры Клиффорда, удовлетворяющие ОБС (3.22), образуют полугруппу: если G и G' ему удовлетворяют, то GG' тоже.*

Это очевидно из (3.22).

Утверждение. *Все решения ОБС (3.22) имеют определенный заряд, т.е. $[Q, G] = qG$ при некотором целом q.*

Доказательство опускаем.

Мы положим ОБС в форме (3.22) или (3.23) в основу дальнейшего изложения и расширим понятие квазигруппового элемента алгебры Клиффорда, назвав *квазигрупповыми элементами все решения ОБС.* Для простоты мы как правило будем работать с элементами G, имеющими нулевой заряд (например, с н. у. экспонентами), но основные утверждения легко переносятся на общий случай.

3.7 Обобщенная теорема Вика

Вакуумные средние от произведений фермионных операторов со вставками квазигрупповых элементов обладают некоторыми специальными свойствами, которые описываются обобщенной теоремой Вика. Пусть $v_i = \sum_j v_{ij}\psi_j$ – произвольная линейная комбинация операторов ψ_j, а $w_i^* = \sum_j w_{ij}^*\psi_j^*$ – произвольная линейная комбинация операторов ψ_j^*.

Утверждение (обобщенная теорема Вика). *Пусть G, G' – любые два квазигрупповых элемента с нулевым зарядом. Тогда для любых v_j, w_i^* и любого n таких, что $\langle n| G'G |n\rangle \neq 0$ справедливо тождество*

$$\frac{\langle n| G'v_1 \dots v_m w_m^* \dots w_1^* G |n\rangle}{\langle n| G'G |n\rangle} = \det_{i,j=1,\dots,m} \frac{\langle n| G'v_j w_i^* G |n\rangle}{\langle n| G'G |n\rangle}, \tag{3.24}$$

Утверждение может быть доказано по индукции. Предположим, что формула (3.24) справедлива для некоторого $m \geq 1$ (очевидно, она обращается в тривиальное тождество при $m = 1$). Положим

$$\langle U| = \langle n| G'w_1^*, \quad \langle U'| = \langle n| G'v_1v_2 \dots v_{m+1}w_{m+1}^* w_m^* \dots w_2^*, \quad |V\rangle = |V'\rangle = |n\rangle .$$

Подставив это в ОБС (3.23), видим, что его правая часть тождественно обращается в 0, поскольку либо $\psi_k |n\rangle = 0$, либо $\psi_k^* |n\rangle = 0$, и таким образом имеем

$$\sum_k \langle n| G'w_1^*\psi_k G |n\rangle \langle n| G'v_1 \dots v_{m+1}w_{m+1}^* \dots w_2^*\psi_k^* G |n\rangle = 0$$

Подставив в первом множителе $w_1^*\psi_k = w_{1k}^* - \psi_k w_1^*$ и протащив ψ_k^* во втором множителе через цепочку операторов w_j^*'s, получим в левой части

$$\langle n| G'G |n\rangle \langle n| G'v_1 \dots v_{m+1}w_{m+1}^* \dots w_1^* G |n\rangle$$

$$- (-1)^m \sum_k \langle n| G'\psi_k w_1^* G |n\rangle \langle n| G'v_1 \dots v_{m+1}\psi_k^* w_{m+1}^* \dots w_2^* G |n\rangle$$

Теперь двигаем ψ_k^* налево через цепочку операторов v_j и используем на каждом шаге соотношение $v_j \psi_k^* = v_{jk} - \psi_k^* v_j$. В результате получаем

$$\langle n| G'G |n\rangle \langle n| G' v_1 \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_1^* G |n\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \langle n| G' v_j w_1^* G |n\rangle \langle n| G' v_1 \dots \not{v}_j \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_2^* G |n\rangle$$

$$+ \sum_k \langle n| G' \psi_k w_1^* G |n\rangle \langle n| G' \psi_k^* v_1 \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_2^* G |n\rangle$$

В последней строчке мы можем опять воспользоваться ОБС, чтобы преобразовать ее к виду

$$\sum_k \langle n| \psi_k G' w_1^* G |n\rangle \langle n| \psi_k^* G' v_1 \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_2^* G |n\rangle$$

что равно 0, поскольку опять либо $\langle n| \psi_k = 0$, либо $\langle n| \psi_k^* = 0$. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$\langle n| G'G |n\rangle \langle n| G' v_1 \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_1^* G |n\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \langle n| G' v_j w_1^* G |n\rangle \langle n| G' v_1 \dots \not{v}_j \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_2^* G |n\rangle = 0$$

или

$$\frac{\langle n| G' v_1 \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_1^* G |n\rangle}{\langle n| G'G |n\rangle}$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \frac{\langle n| G' v_j w_1^* G |n\rangle}{\langle n| G'G |n\rangle} \, \frac{\langle n| G' v_1 \dots \not{v}_j \dots v_{m+1} w_{m+1}^* \dots w_2^* G |n\rangle}{\langle n| G'G |n\rangle}$$

По индуктивному предположению второе частное в правой части дается определителем выписанной выше матрицы размера m на m. Теперь замечаем, что выражение в правой части есть разложение определителя соответствующей матрицы размера $m+1$ на $m+1$ по первому столбцу, и тем самым утверждение доказано.

3.8 Операторы $e^{J_\pm}$

Для приложений к интегрируемым иерархиям особенно важны групповые элементы специального вида, которые будут введены в этом разделе.

Рассмотрим операторы

$$J_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} {:}\psi_j \psi_{j+k}^*{:} = \mathrm{res}_z \Big({:}\psi(z) z^{k-1} \psi^*(z){:} \Big) \tag{3.25}$$

которые являются Фурье-модами оператора тока $J(z) = {:}\psi(z)\psi^*(z){:}$. Отметим, что н. у. в (3.25) существенно только при $k = 0$, и в этом случае J_0 совпадает с оператором заряда Q (3.9). При $k \neq 0$ н. у. может быть убрано:

$$J_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{j+k}^*\,, \qquad k \neq 0. \tag{3.26}$$

Эти операторы имеют вид (3.2) с матрицей $A_{ij} = \delta_{i,j-k}$. Эта матрица имеет бесконечную ненулевую диагональ, так что при работе с формальными выражениями, содержащими бесконечные суммы, следует проявлять осторожность (см. пример вычисления коммутатора ниже).

Упражнение. Показать, что $[J_k, \psi_m] = \psi_{m-k}$, $[J_k, \psi^*_m] = -\psi^*_{m+k}$.

Займемся сначала операторами J_k с положительными k и составим из них оператор

$$J_+ = J_+(\mathbf{t}_+) = \sum_{k\geq 1} t_k J_k \tag{3.27}$$

с произвольными параметрами t_k (они впоследствии будут отождествлены с временами иерархии КП), набор которых мы для краткости обозначаем $\mathbf{t}_+ = \{t_1, t_2, \dots\}$ или просто $\mathbf{t}$ если это не приводит к недоразумениям.

Упражнение. Проверить, что $J_+(\mathbf{t}_+)$ уничтожает правый вакуум: $J_+(\mathbf{t}_+)\left|0\right\rangle = 0$.

Нетрудно проверить, что все J_k с $k \geq 1$ коммутируют между собой, а фермионные поля $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ преобразуются под действием элемента e^{J_+} диагонально:

$$\begin{aligned} e^{J_+(\mathbf{t})}\psi(z)e^{-J_+(\mathbf{t})} &= e^{\xi(\mathbf{t},\,z)}\psi(z) \\ e^{J_+(\mathbf{t})}\psi^*(z)e^{-J_+(\mathbf{t})} &= e^{-\xi(\mathbf{t},\,z)}\psi^*(z), \end{aligned} \tag{3.28}$$

где использовано ранее введенное обозначение $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum\limits_{j\geq 1} t_j z^j$. Тогда, очевидно, закон преобразования операторов ψ_n, ψ^*_n таков:

$$\begin{aligned} e^{J_+(\mathbf{t})}\psi_n e^{-J_+(\mathbf{t})} &= \sum_{k\geq 0} \psi_{n-k} h_k(\mathbf{t}) \\ e^{J_+(\mathbf{t})}\psi^*_n e^{-J_+(\mathbf{t})} &= \sum_{k\geq 0} \psi^*_{n+k} h_k(-\mathbf{t}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

где полиномы Шура h_k определены формулой (2.26).

Аналогичным образом введем оператор

$$J_- = J_-(\mathbf{t}_-) = \sum_{k\geq 1} t_{-k} J_{-k} \tag{3.30}$$

с произвольными параметрами t_{-k} (времена $\mathbf{t}_+ = \{t_1, t_2, \dots\}$, $\mathbf{t}_- = \{t_{-1}, t_{-2}, \dots\}$ вместе с еще не введенным дискретным временем t_0 образуют полный набор времен в иерархии двумеризованной цепочки Тоды). В дальнейшем, чтобы не загромождать формулы большим количеством значков $\pm$, мы будем писать просто $\mathbf{t}$ для любого полубесконечного набора времен (имея в виду $\mathbf{t}_+$ или $\mathbf{t}_-$).

Как и в случае J_+ легко проверить, что все J_k с $k \leq -1$ коммутируют между собой, а фермионные поля $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ преобразуются под действием элемента e^{J_-} диагонально:

$$\begin{aligned} e^{J_-(\mathbf{t})}\psi(z)e^{-J_-(\mathbf{t})} &= e^{\xi(\mathbf{t},\,z^{-1})}\psi(z) \\ e^{J_-(\mathbf{t})}\psi^*(z)e^{-J_-(\mathbf{t})} &= e^{-\xi(\mathbf{t},\,z^{-1})}\psi^*(z). \end{aligned} \tag{3.31}$$

что эквивалентно следующим правилам действия на ψ_n, ψ_n^*:

$$
\begin{aligned}
e^{J_-(\mathbf{t})}\psi_n e^{-J_-(\mathbf{t})} &= \sum_{k\geq 0}\psi_{n+k}h_k(\mathbf{t})\\
e^{J_-(\mathbf{t})}\psi_n^* e^{-J_-(\mathbf{t})} &= \sum_{k\geq 0}\psi_{n-k}^* h_k(-\mathbf{t})
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Найдем коммутатор $[J_k, J_l]$:

$$
[J_k, J_l] = \sum_j [J_k, \psi_j\psi_{j+l}^*] = \sum_j \Big([J_k, \psi_j]\psi_{j+l}^* + \psi_j[J_k, \psi_{j+l}^*]\Big)
$$

Пользуясь полученными выше формулами, будем иметь

$$
[J_k, J_l] = \sum_j \Big(\psi_{j-k}\psi_{j+l}^* - \psi_j\psi_{j+l+k}^*\Big) \stackrel{?}{=} 0 \tag{3.33}
$$

Формально можно сдвинуть индекс суммирования в первой сумме $j \to j+k$ и получить в правой части 0. Для проверки результата вычислим $\langle 0|\,[J_k, J_{-k}]\,|0\rangle$ с $k>0$ “вручную”:

$$
\langle 0|\,[J_k, J_{-k}]\,|0\rangle = \langle 0|\,J_kJ_{-k}\,|0\rangle = \sum_{-k\leq j<0}\,\sum_{0\leq l<k}\langle 0|\,\psi_j\psi_{j+k}^*\psi_l\psi_{l-k}^*\,|0\rangle = \sum_{l=0}^{k-1}1 = k \quad (!)
$$

Где же ошибка? Дело в том, что операция сдвига индекса законна только при $k+l\neq 0$. В этом случае сумма операторов в правой части определена корректно (и действительно равна 0) поскольку ее матричные элементы по любым базисным состояниям содержат лишь конечное число членов. Если же $k+l=0$, может возникнуть бесконечная сумма, которая требует доопределения. В этом случае нужно сначала переписать правую часть в терминах н. у. выражений:

$$
[J_k, J_{-k}] = \sum_j \boldsymbol{:}\Big(\psi_{j-k}\psi_{j-k}^* - \psi_j\psi_j^*\Big)\boldsymbol{:} + \sum_j\Big(\theta(j<k) - \theta(j<0)\Big)
$$

Здесь $\theta(j<k)=1$ при $j<k$ и 0 в противном случае. Н. у. выражения хорошо определены, и теперь индекс суммирования в первой сумме можно сдвинуть. Те члены, которые после этого останутся, дают правило коммутации для Фурье-гармоник фермионного тока

$$
[J_k, J_l] = k\delta_{k+l,0} \tag{3.34}
$$

которое идентично правилу коммутации бозонных операторов.

Упражнение. Доказать формулы

$$
\begin{aligned}
&[J_+(\mathbf{t}_+),\ J_-(\mathbf{t}_-)] = \sum_{k\geq 1} kt_kt_{-k}\\
&e^{J_+(\mathbf{t}_+)}e^{J_-(\mathbf{t}_-)} = \exp\Big(\sum_{k\geq 1} kt_kt_{-k}\Big)e^{J_-(\mathbf{t}_-)}e^{J_+(\mathbf{t}_+)}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

3.9 Бозон-фермионное соответствие

3.9.1 Правила бозонизации

Как мы только что видели, Фурье-моды оператора тока J_k имеют такие же коммутационные соотношения, как и осцилляторные моды операторов свободного бозонного поля: $[J_k, J_l] = k\delta_{k+l,0}$, т.е. J_k и J_{-k}/k канонически сопряжены. Оператор $J_0 = Q$ играет особую роль. Введем канонически сопряженный ему оператор P – такой, что e^P является оператором сдвига индекса:

$$e^P \psi_n e^{-P} = \psi_{n+1}\,, \qquad e^P \psi_n^* e^{-P} = \psi_{n+1}^*$$

На вакуумных состояниях $e^{\pm P}|n\rangle = |n \pm 1\rangle$. Легко проверить, что такое определение действительно приводит к коммутационному соотношению $[Q, P] = 1$.

Введем киральное бозонное поле

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{k>0} \frac{J_{-k}}{k} z^k + P + Q\log z - \sum_{k>0} \frac{J_k}{k} z^{-k} \\ &= J_-([z]) + P + J_0 \log z - J_+([z^{-1}]) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Во второй сточке использовано обозначение $J_\pm([z]) = J_{\pm 1}z + \frac{1}{2}J_{\pm 2}z^2 + \frac{1}{3}J_{\pm 3}z^3 + \ldots$. При этом $z\partial_z \phi(z) = J(z)$ или

$$\phi(z_2) - \phi(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} J(z) \frac{dz}{z}$$

Операторы J_{+k} с $k > 0$ уничтожают правый вакуум (это бозонные операторы рождения), а J_{-k} с $k > 0$ – левый (это бозонные операторы уничтожения). Введем бозонное н. у. ${}^*_*(\ldots)^*_*$ по обычному правилу, что все операторы рождения располагаются справа, а уничтожения слева, и рассмотрим н. у. экспоненты от бозонного поля:

$$\begin{aligned} {}^*_* e^{\phi(z)} {}^*_* &= e^{J_-([z])}\, e^P z^Q\, e^{-J_+([z^{-1}])} \\ {}^*_* e^{-\phi(z)} {}^*_* &= e^{-J_-([z])}\, z^{-Q} e^{-P}\, e^{J_+([z^{-1}])} \end{aligned} \tag{3.37}$$

(отметим, что н. у. затрагивает только операторы J_k с $k \neq 0$). Из (3.35) следует, что

$$e^{J_\pm(\mathbf{t})}\, {}^*_* e^{\phi(z)} {}^*_*\, e^{-J_\pm(\mathbf{t})} = e^{\xi(\mathbf{t}, z^{\pm 1})}\, {}^*_* e^{\phi(z)} {}^*_*$$

$$e^{J_\pm(\mathbf{t})}\, {}^*_* e^{-\phi(z)} {}^*_*\, e^{-J_\pm(\mathbf{t})} = e^{-\xi(\mathbf{t}, z^{\pm 1})}\, {}^*_* e^{-\phi(z)} {}^*_*$$

Эти формулы говорят о том, что ${}^*_* e^{\pm\phi(z)} {}^*_*$ ведут себя как фермионные поля $\psi(z), \psi^*(z)$. Более того, можно показать, что все матричные элементы операторов ${}^*_* e^{\pm\phi(z)} {}^*_*$ и $\psi(z), \psi^*(z)$ по базисным состояниям совпадают. Следовательно, можно отождествить

$$\psi(z) = {}^*_* e^{\phi(z)} {}^*_* \qquad \psi^*(z) = {}^*_* e^{-\phi(z)} {}^*_*. \tag{3.38}$$

Мы не будем давать полного доказательства, а ограничимся сравнением матричных элементов по состояниям $\langle n|\, e^{J_+(\mathbf{t}_+)}$ и $e^{J_-(\mathbf{t}_-)}\,|n-1\rangle$ (очевидно, матричные элементы интересующих нас операторов отличны от 0, только если заряд правого вакуума на 1 меньше заряда левого). На самом деле этого достаточно, если знать, что указанные состояния представляют собой своего рода “производящие функции” базисных состояний (так называемые когерентные состояния), но мы этот факт доказывать не будем. Итак, мы хотим показать, что

$$\langle n|\, e^{J_+(\mathbf{t}_+)}\, {}^*_* e^{\phi(z)} {}^*_*\, e^{J_-(\mathbf{t}_-)}\, |n-1\rangle = \langle n|\, e^{J_+(\mathbf{t}_+)} \psi(z) e^{J_-(\mathbf{t}_-)}\, |n-1\rangle$$

для всех наборов времен $\mathbf{t}_+, \mathbf{t}_-$. Несложное прямое вычисление с использованием определения (3.37), коммутационного соотношения (3.35) и соотношений (3.28), (3.31) показывает, что обе части равны

$$z^{n-1} \exp\Big(\xi(\mathbf{t}_+, z) - \xi(\mathbf{t}_-, z^{-1}) + \sum_{k\geq 1} k t_k t_{-k}\Big).$$

Проверим, что из правил бозонизации (3.38) следует, что

$$:\psi(z)\psi^*(z): \, = z\partial_z \phi(z) \tag{3.39}$$

и в этом смысле они согласованы с (3.36). Пишем $\psi(z_2)\psi^*(z_1) = {}^*_* e^{\phi(z_2)} {}^*_* {}^*_* e^{-\phi(z_1)} {}^*_*$ и преобразуем обе части так, чтобы в них стояли н. у. выражения:

$$\psi(z_2)\psi^*(z_1) = \, :\psi(z_2)\psi^*(z_1): + \frac{z_1}{z_2 - z_1}$$

$${}^*_* e^{\phi(z_2)} {}^*_* {}^*_* e^{-\phi(z_1)} {}^*_* = \frac{z_1}{z_2 - z_1}\, {}^*_* e^{\phi(z_2) - \phi(z_1)} {}^*_*$$

Положим $z_1 = z$, $z_2 = z_1 + \varepsilon$ и получим

$$\frac{z}{\varepsilon}\Big({}^*_* e^{\phi(z+\varepsilon) - \phi(z)} {}^*_* - 1\Big) = \, :\psi(z+\varepsilon)\psi^*(z):$$

что совпадает с (3.39) в пределе $\varepsilon \to 0$.

Будучи примененными к вакуумным состояниям, операторы (3.37) упрощаются, поскольку либо $e^{J_-([z])}$, либо $e^{J_+([z^{-1}])}$ исчезает при действии на вакуум. Это приводит к следующим правилам бозонизации:

$$\begin{aligned} \langle n|\, \psi(z) &= z^{n-1} \langle n{-}1|\, e^{-J_+([z^{-1}])} \\ \langle n|\, \psi^*(z) &= z^{-n} \langle n{+}1|\, e^{J_+([z^{-1}])} \end{aligned} \tag{3.40}$$

для левого вакуума и

$$\begin{aligned} \psi(z)\, |n\rangle &= z^n\, e^{J_-([z])}\, |n{+}1\rangle \\ \psi^*(z)\, |n\rangle &= z^{-n+1} e^{-J_-([z])}\, |n{-}1\rangle \end{aligned} \tag{3.41}$$

для правого.

Упражнение. Показать, что

$$\langle n|\, \psi^*(\zeta)\psi(z) = \frac{z^n \zeta^{1-n}}{\zeta - z} \langle n|\, e^{J_+([\zeta^{-1}] - [z^{-1}])}. \tag{3.42}$$

Задача. С помощью многократного применения правил бозонизации вывести формулы

$$
\begin{aligned}
&\langle n|\, \psi(z_1)\dots\psi(z_m) = (z_1\dots z_m)^{n-m}\prod_{i<j}(z_i-z_j)\ \langle n-m|\, e^{-J_+([z_1^{-1}])-\dots-J_+([z_m^{-1}])},\\
&\langle n|\, \psi^*(z_1)\dots\psi^*(z_m) = (z_1\dots z_m)^{-n-m+1}\prod_{i<j}(z_i-z_j)\,\langle n+m|\, e^{J_+([z_1^{-1}])+\dots+J_+([z_m^{-1}])}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

и аналогичные им для правого вакуума.

3.9.2 Вершинные операторы

Правила бозонизации можно представить в другой, но эквивалентной форме, основанной на явной реализации бозонного фоковского пространства $\mathcal{H}_B$ как пространства полиномов от бесконечного количества переменных $t_1, t_2, t_3, \dots$. Более точно, рассмотрим пространство

$$
\mathcal{H}_B = \mathbb{C}[w, w^{-1},\, t_1, t_2, t_3, \dots] = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} w^l\, \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, \dots]
$$

где мы добавили еще одну переменную w для учета фермионных состояний с различным зарядом, и построим отображение $\Phi : \mathcal{H}_F \to \mathcal{H}_B$, определенное для произвольного вектора $|U\rangle \in \mathcal{H}_F$ следующим образом:

$$
\Phi(|U\rangle) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} w^l\, \langle l|\, e^{J_+(t)}\, |U\rangle \tag{3.44}
$$

Если состояние $|U\rangle$ имеет определенный заряд m, от суммы справа остается только одно ненулевое слагаемое с $l = m$. При этом операторы рождения и уничтожения фермионов превращаются в некоторые операторы, действующие на пространстве функций от w и t_i.

Утверждение. *Для компонент тока имеем соответствие:*

$$
\Phi(J_k\,|U\rangle) = \begin{cases} \partial_{t_k}\Phi(|U\rangle)\,, & k>0,\\[2mm] w\partial_w\Phi(|U\rangle)\,, & k=0,\\[2mm] -kt_{-k}\Phi(|U\rangle)\,, & k<0. \end{cases} \tag{3.45}
$$

Первые две формулы очевидны из определения (3.44). Третья следует из коммутационного соотношения $e^{J_+(\mathbf{t})}J_{-k} = (J_{-k}+kt_k)e^{J_+(\mathbf{t})}$ $(k>0)$, полученного с помощью (3.3).

Введем так называемые *вершинные операторы* формулами

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \exp\left(\sum_{j\ge 1} t_j z^j\right)\exp\left(-\sum_{j\ge 1}\frac{1}{jz^j}\,\partial_{t_j}\right) e^P z^Q\\
X^*(z) &= \exp\left(-\sum_{j\ge 1} t_j z^j\right)\exp\left(\sum_{j\ge 1}\frac{1}{jz^j}\,\partial_{t_j}\right) z^{-Q}e^{-P}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Здесь операторы P, Q задаются действием на функции от w:

$$e^P f(w) = wf(w)\,, \qquad z^Q f(w) = f(zw)$$

(легко проверить, что $[Q, P] = 1$). Используя введенные ранее сокращенные обозначения, можно написать

$$\begin{aligned} X(z) &= e^{\xi(\mathbf{t},z)} e^{-\xi(\tilde{\partial},z^{-1})} e^P z^Q \\ X^*(z) &= e^{-\xi(\mathbf{t},z)} e^{\xi(\tilde{\partial},z^{-1})} z^{-Q} e^{-P} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Утверждение. *При бозон-фермионном соответствии фермионные поля $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ представляются вершинными операторами $X(z), X^*(z)$:*

$$\Phi(\psi(z)\,|U\rangle) = X(z)\Phi(|U\rangle)$$

$$\Phi(\psi^*(z)\,|U\rangle) = X^*(z)\Phi(|U\rangle)$$

Для доказательства первого равенства распишем отдельно левую и правую части и сравним их:

$$\Phi(\psi(z)\,|U\rangle) = \sum_n w^n \langle n|\, e^{J_+(\mathbf{t})}\psi(z)\,|U\rangle = e^{\xi(\mathbf{t},z)} \sum_n w^n \langle n|\, \psi(z) e^{J_+(\mathbf{t})}\,|U\rangle$$

$$X(z)\Phi(|U\rangle) = e^{\xi(\mathbf{t},z)} \sum_n z^{n-1} w^n \langle n-1|\, e^{-J_+([z])} e^{J_+(\mathbf{t})}\,|U\rangle$$

Теперь осталось воспользоваться правилами бозонизации (3.40). Аналогично доказывается и второе равенство.

3.10 Тау-функции как вакуумные средние

Основное утверждение, связывающее построенную выше теорию свободных фермионов с теорией иерархии КП, заключается в том, что если G – произвольный квазигрупповой элемент алгебры Клиффорда (для простоты с нулевым зарядом), то вакуумное среднее

$$\boxed{\tau(\mathbf{t}) = \langle 0|\, e^{J_+(\mathbf{t})} G\,|0\rangle} \tag{3.48}$$

является τ-функцией иерархии КП, а отношения вакуумных средних

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(\mathbf{t}, z) &= \frac{\langle 1|\, e^{J_+(\mathbf{t})}\psi(z) G\,|0\rangle}{\langle 0|\, e^{J_+(\mathbf{t})} G\,|0\rangle} \\ \psi^*(\mathbf{t}, z) &= \frac{\langle -1|\, e^{J_+(\mathbf{t})}\psi^*(z) G\,|0\rangle}{z\,\langle 0|\, e^{J_+(\mathbf{t})} G\,|0\rangle} \end{aligned}} \tag{3.49}$$

представляют собой функцию Бейкера-Ахиезера и ей сопряженную.

Прежде всего убедимся, что эти формулы согласованы с (2.50), (2.51). Действительно, пронося операторы ψ, ψ^* в числителе налево и пользуясь формулами (3.40), видим, что $\psi(\mathbf{t}, z)$ и $\psi^*(\mathbf{t}, z)$ связаны с τ "японскими" формулами (2.50), (2.51). Осталось показать, что функция $\tau(t)$, определенная формулой (3.48), удовлетворяет билинейному соотношению (2.57), т.е.

$$\mathrm{res}_z \left[e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} \langle 0| e^{-J_+([z^{-1}])} e^{J_+(\mathbf{t})} G |0\rangle \langle 0| e^{J_+([z^{-1}])} e^{J_+(\mathbf{t}')} G |0\rangle \right] = 0$$

Применив формулы (3.40), легко убедиться, что оно эквивалентно тождеству (3.23), в котором надо положить $\langle U| = \langle 1| e^{J_+(\mathbf{t})}$, $\langle U'| = \langle -1| e^{J_+(\mathbf{t}')}$.

Более общо, рассматривают следующие классы τ-функций (которые обобщают друг друга):

- τ-функции иерархии КП, зависящие от времен $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \ldots\}$:

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0| e^{J_+(\mathbf{t})} G |0\rangle \tag{3.50}$$

- τ-функции модифицированной иерархии КП (МКП)

$$\tau_n(\mathbf{t}) = \langle n| e^{J_+(\mathbf{t})} G |n\rangle \tag{3.51}$$

  Уравнения иерархии МКП – дифференциально-разностные, включающие сдвиги переменной $n = t_0$ ("нулевого времени"). При любом фиксированном n τ-функция (3.51) является решением иерархии КП.

- τ-функции двумеризованной иерархии цепочки Тода:

$$\tau_n(\mathbf{t}_+, \mathbf{t}_-) = \langle n| e^{J_+(\mathbf{t}_+)} G e^{-J_-(\mathbf{t}_-)} |n\rangle \tag{3.52}$$

  Это наиболее общая τ-функция, которую можно построить с помощью однокомпонентных фермионов. При фиксированных n, $\mathbf{t}_-$ эта формула дает τ-функцию КП (как функцию от $\mathbf{t}_+$).

Рассмотрим τ-функцию иерархии МКП. Покажем, что она удовлетворяет билинейному тождеству, которое есть прямое следствие ОБС в форме (3.23). Положим в нем $|V\rangle = |n\rangle$, $|V'\rangle = |n'\rangle$ с $n \geq n'$, где $|n\rangle$ и $|n'\rangle$ два сдвинутых дираковских вакуума. Мы имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle U| \psi_k G |n\rangle \langle U'| \psi_k^* G |n'\rangle = 0 \tag{3.53}$$

поскольку либо ψ_k либо ψ_k^* уничтожает правый вакуум в каждом члене правой части (3.23). Теперь положим $\langle U| = \langle n+1| e^{J_+(\mathbf{t})}$, $\langle U'| = \langle n'-1| e^{J_+(\mathbf{t}')}$ и напишем

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_k \langle n+1| e^{J_+(\mathbf{t})} \psi_k G |n\rangle \langle n'-1| e^{J_+(\mathbf{t}')} \psi_k^* G |n'\rangle \\
&= \mathrm{res}_z \left[z^{-1} \langle n+1| e^{J_+(\mathbf{t})} \psi(z) G |n\rangle \langle n'-1| e^{J_+(\mathbf{t}')} \psi^*(z) G |n'\rangle \right] \\
&= \mathrm{res}_z \left[e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} z^{n-n'} \langle n| e^{J_+(\mathbf{t}-[z^{-1}])} G |n\rangle \langle n'| e^{J_+(\mathbf{t}'+[z^{-1}])} G |n'\rangle \right],
\end{aligned}$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями ферми-операторов с $e^{J_+(\mathbf{t})}$ и правилами бозонизации (3.40). Здесь res_z означает выделение коэффициента при z^{-1} в ряде Лорана. Получим, что тождество

$$\oint_{\mathcal{C}_\infty} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} z^{n-n'} \tau_n(\mathbf{t}-[z^{-1}])\tau_{n'}(\mathbf{t}'+[z^{-1}])dz = 0 \tag{3.54}$$

выполняется для всех $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$ и $n \geq n'$. При $n = n'$ (3.54) превращается в билинейное тождество для τ-функции иерархии КП:

$$\oint_{\mathcal{C}_\infty} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} \tau(\mathbf{t}-[z^{-1}])\tau(\mathbf{t}'+[z^{-1}])dz = 0 \tag{3.55}$$

Упражнение. Показать, что если $\tau(\mathbf{t})$ – τ-функция КП, то $\tau(-\mathbf{t})$ тоже.

При $n = n' + 1$ (3.54) дает билинейное тождество для τ-функции иерархии МКП:

$$\oint_{\mathcal{C}_\infty} z e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} \tau_{n+1}(\mathbf{t}-[z^{-1}])\tau_n(\mathbf{t}'+[z^{-1}])dz = 0. \tag{3.56}$$

Список литературы

[1] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* Москва, “Наука”, 1980.

[2] Т.Мива, М.Джимбо, Э.Дате, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры.* Москва, изд-во МЦНМО, 2005.

[3] L.A.Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, Advanced Series in Mathematical Physics, vol. 12, World Scientific, 1991.

[4] А.Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Москва, “Мир”, 1989.

[5] O.Babelon, D.Bernard, M.Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge University Press, 2003.

[6] Б.Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения*, УМН **36:2** (1981) 12-80.