

**Группы и алгебры Ли**  
**Листок 13**  
**Универсальная обёртывающая алгебра**

1. Покажите, что всякое дифференцирование алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  единственным образом продолжается до дифференцирования универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ .
2. Покажите, что в любом неприводимом комплексном представлении алгебры Ли все элементы центра её универсальной обертывающей алгебры действуют скалярными операторами.
3. Докажите, что элемент Казимира  $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$  лежит в центре универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ . Проверьте, что любой элемент алгебры  $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов  $e^i h^j C^k$  или  $f^i h^j C^k$ , где  $i, j, k$  – целые неотрицательные числа.
4. Докажите, что центр алгебры  $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  порождён элементом  $C$ .
5. Найдите центр универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ , если  $\mathfrak{g}$  – 2-мерная неабелева алгебра Ли.
6. Найдите центр универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ , если  $\mathfrak{g}$  – 3-мерная алгебра Гейзенберга.