

Группы и алгебры Ли
Листок 13
Универсальная обёртывающая алгебра

1. Покажите, что всякое дифференцирование алгебры Ли \mathfrak{g} единственным образом продолжается до дифференцирования универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.
2. Покажите, что в любом неприводимом комплексном представлении алгебры Ли все элементы центра её универсальной обертывающей алгебры действуют скалярными операторами.
3. Докажите, что элемент Казимира $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Проверьте, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов $e^i h^j C^k$ или $f^i h^j C^k$, где i, j, k – целые неотрицательные числа.
4. Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ порождён элементом C .
5. Найдите центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, если \mathfrak{g} – 2-мерная неабелева алгебра Ли.
6. Найдите центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, если \mathfrak{g} – 3-мерная алгебра Гейзенберга.