Уравнения в частных производных
(основные темы курса, рассчитанного на 20 лекций)
лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов

Часть 1.

Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных: уравнение колебаний струны; уравнение теплопроводности, стационарные уравнения. Линейные уравнение с частными производными второго порядка. Главная часть уравнения, ее преобразования при заменах координат. Классификация линейных уравнений второго порядка. Характеристики уравнений с частными производными.

Постановка основных краевых задач. Понятие о корректных краевых задачах. Теорема Коши-Ковалевской о локальной разрешимости задачи Коши для уравнений типа Ковалевской. Пример Адамара некорректной задачи.

Задача Коши для уравнения колебаний струны, формула Даламбера. Гладкость решения в зависимости от гладкости начальных данных. Области зависимости решений от начальных данных, конечная скорость распространения колебаний. Метод Фурье. Обоснование метода Фурье для однородного и неоднородного уравнения колебаний закрепленной струны. Обобщенные решения уравнения колебаний струны. Теоремы существования и единственности в классе обобщенных решений.

Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля и ее свойства. Полнота системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля.

Часть 2.

Уравнение теплопроводности. Смешанная краевая задача. Метод Фурье. Принцип максимума. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от начальных и граничных условий. Функция Грина уравнения теплопроводности.

Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве. Теорема единственности в классе ограниченных в слое функций. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье, формула Пуассона. Гладкость решения. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Уравнения и системы, корректные по Петровскому.

Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Теорема единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$. Распространение волн в $\mathbf{R}^3$. Передний и задний фронт волны. Метод спуска. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^2$. Особенности распространение волн в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^1$. Области зависимости решений от начальных данных.

Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина в шаре и в круге. Обоснование формулы Пуассона.

Гармонические функции и их свойства: бесконечная дифференцируемость, теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и шару. Принцип максимума для гармонических функций. Лемма о нормальной производной. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Неравенство Харнака. Теорема Лиувилля.

Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Неравенство Фридрихса. Решение обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона с однородными и неоднородными краевыми условиями. Вариационный метод решения.