

Список тем курсовых и дипломных работ

А. Г. Горинов, gorinov@mccme.ru

Сферическая геометрия и определение долготы (только для 1-2 курсов). Представьте себе, что вы плывете на корабле в открытом океане и хотите понять, где вы находитесь. Широту корабля определить несложно, но как определить долготу? Это тоже не очень сложно сделать, если иметь часы, которые показывают время в начале отсчета, например, в Гринвиче. Если же часов нет, то в качестве их замены можно использовать Луну: она довольно быстро движется по небу. В этом проекте предлагается разобраться, как именно работает метод лунных расстояний, а также познакомиться с элементами сферической геометрии, а заодно и гиперболической тоже.

Автоморфизмы эллиптических кривых, теорема Понселе и ее варианты. Пусть E_1, E_2 — два эллипса на плоскости. Предположим, что E_2 лежит внутри E_1 . Рассмотрим такой процесс: пусть $P_0 \in E_1$. Проведем через P_0 касательную прямую к E_2 . Она пересечет E_1 в двух точках. Одна из них — P_0 , а вторую мы обозначим через P_1 . Проведем через P_1 другую касательную к E_2 , которая пересечет E_1 в точках P_1 и P_2 , и т.д. Получим последовательность точек P_0, P_1, P_2, \dots . Теорема Понселе утверждает, что если эта последовательность периодична для некоторой начальной точки P_0 , то она периодична для любой другой начальной точки, причем с тем же периодом.

Комплексные эллиптические кривые — это компактные комплексные кривые рода 1, т.е., кривые, гомеоморфные поверхности бублика. У таких бубликов есть автоморфизмы конечного порядка, при которых орбиты всех точек имеют одинаковое число элементов. Наиболее простое доказательство теоремы Понселе основано на этом замечании.

В данном проекте предлагается разобраться с доказательством теоремы Понселе, а также придумать и доказать какую-нибудь вариацию на ее тему. Например, можно попробовать доказать такое утверждение: пусть C_1, C_2, C_3 — попарно непересекающиеся окружности на плоскости, такие что C_1 находится внутри C_2 , а C_2 — внутри C_3 . Выберем точку $P_0 \in C_2$ и проведем через нее окружность, касающуюся C_1 и C_3 . Эта окружность пересечет C_2 в двух точках, одна из которых — P_0 , а другую мы назовем P_1 . Проведем через P_1 вторую окружность, касающуюся C_1 и C_3 . Эта окружность пересечет C_2 в P_1 и P_2 и т.д. Утверждение такое же, как и в теореме Понселе: если последовательность P_0, P_1, P_2, \dots периодична для какого-то выбора начальной точки P_0 , то она периодична с тем же периодом для любой другой начальной точки.

Теорема де Рама. Пусть M — гладкое многообразие. Имеются два комплекса, которые считают вещественные когомологии M : комплекс $C^*(M)$ гладких сингулярных коцепей и комплекс $\Omega^*(M)$ дифференциальных форм. Имеется естественное отображение интегрирования

$$\int : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(M).$$

Цели данного проекта — разобраться в следующем.

- Отображение \int согласовано с дифференциалами и является квазиизоморфизмом, т.е., индуцирует изоморфизм векторных пространств когомологий.
- На $C^*(M)$ и $\Omega^*(M)$ есть умножения, согласованные с дифференциалами: например, для p -формы ω и q -формы η определено их внешнее произведение $\omega \wedge \eta$ и имеет место соотношение

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

Как показывают простейшие примеры, \int не является отображением алгебр. Тем не менее, \int индуцирует изоморфизм алгебр когомологий $H^*(\Omega^*(M)) \rightarrow H^*(C^*(M))$.

- Более общо, можно написать “старшие поправки” к \int , дополняющие его до квазиизоморфизма A_∞ -алгебр. Т.е., вещественные сингулярные коцепи и дифференциальные формы знают о гомотопическом типе M одно и то же.

Конические разрешение дискриминантов и применения к пространствам модулей. Цель данного проекта — применить метод конических разрешений Васильева к вычислению рациональных когомологий, например, следующих пространств и соответствующих пространств модулей:

- Пространство кватернионов в $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ с особенностями не хуже A_1 , т.е., имеющих, возможно, самопересечения, но не имеющих худших особенностей.
- Пространство GIT-стабильных кватернионов в $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
- То же, что в двух предыдущих пунктах, но для кубиков в $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.
- Пространство неособых вещественных кватернионов в \mathbb{P}^2 или кубиков в \mathbb{P}^3 . Неособость в вещественном случае может пониматься в двух смыслах: мы можем требовать, чтобы соответствующая комплексная гиперповерхность была неособа, а можем требовать просто, чтобы у нее не было вещественных особенностей. Оба случая интересны.

Лемма Бейлинсона. Пусть X — аффинное комплексное алгебраическое многообразие, а \mathcal{F} — конструктивный пучок на X . Тогда найдется замкнутое по Зарисскому множество $Y \subset X$, такое что для всех i , кроме, может быть, $i = \dim X$, имеем

$$H^i(X, Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_! j^{-1} \mathcal{F}) = 0,$$

где $j : X \setminus Y \subset X$ — открытое вложение. Это утверждение называется леммой Бейлинсона. Оно очень полезно и много где используется. Например, оно нам говорит, что такое алгебро-геометрический аналог клетки в топологии: это аффинное многообразие и конструктивный пучок на нем, не имеющий когомологий нигде, кроме размерности, равной размерности многообразия.

Цель данного проекта в том, чтобы доказать это утверждение с помощью теории Морса. Кроме того, можно попробовать придумать и доказать аналог для многообразий Штейна.

Комбинаторная структура псевдоаносовских автоморфизмов. Пусть S — поверхность, т.е., 2-мерное компактное гладкое многообразие, возможно, с краем. По теореме Тёрстона, с точностью до изотопии, автоморфизмы S , т.е. гомеоморфизмы $S \rightarrow S$, делятся на 3 класса:

- автоморфизмы конечного порядка (эллиптический случай).
- автоморфизмы, сохраняющие систему замкнутых непересекающихся кривых, ни одна из которых не стягиваема и не изотопна компоненте границы (разложимый случай).
- все остальное (псевдоаносовский случай).

Например, автоморфизм тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, индуцированный элементом $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, эллиптический, если $|\mathrm{tr}(A)| < 2$, разложим, если $|\mathrm{tr}(A)| = 2$, и псевдоаносовский, если $|\mathrm{tr}(A)| > 2$.

Если граница S непуста, то псевдоаносовские автоморфизмы допускают явное комбинаторное описание в терминах некоторого графа $\subset S$, на который S стягивается. Цель данного проекта — понять это описание.

Геометрическая конструкция связности Леви-Чивиты. Пусть E, B — гладкие многообразия, $f : E \rightarrow B$ — расслоение. Связность на E — это подрасслоение $\xi \subset TE$, дополнительное к $f^*(TB)$, т.е., такое что $TE = \xi \oplus f^*(TB)$. Иначе говоря, связность — это набор подпространств $\xi_x \subset T_x E$, $x \in E$, гладко зависящий от x , и такой, что для каждого $x \in E$ дифференциал df_x изоморфно отображает ξ_x на $T_{f(x)} B$.

Если на B есть риманова метрика, $E = TB$, а f — естественная проекция, то на E имеется единственная связность без кручения, согласованная с метрикой. Доказательство этого использует некоторое вычисление в координатах.

Эта связность называется связностью Леви-Чивиты. Заметим, что она нам дает некоторую выделенную метрику на TE . Цель данного проекта — придумать бескоординатную конструкцию этой метрики (или еще как-нибудь геометрически сконструировать связность Леви-Чивиты). Вместо TB в качестве E можно взять главное $O_n(\mathbb{R})$ -расслоение ортонормированных реперов в TB , где $n = \dim B$.