

Введение в обобщенные теории когомологий и их приложения

А. Горинов

Обобщенные теории когомологий — это инварианты топологических пространств, удовлетворяющие всем аксиомам обычной теории когомологий, кроме аксиомы, утверждающей, что когомологии точки равны нулю во всех размерностях $\neq 0$. Оказывается, что такие инварианты существуют, что их во многих случаях можно посчитать и что они содержательны: они знают о некоторых пространствах что-то, чего не знают обычные когомологии. В первой части курса мы изучим простейшие свойства обобщенных теорий когомологий и чуть подробнее рассмотрим одну из них, топологическую К-теорию. Пререквизиты для первой части — материал “Введения в топологию” для 2 курса и знакомство (в каком-то объеме) с обычными (ко)гомологиями.

Во второй части предполагается разобрать с теорему об индексе и ее применения. Для понимания этого понадобится дифференциальная геометрия (связности, метрики, кривизна и т.д.) и функциональный анализ (в объеме курса первого семестра). В качестве альтернативы этому можно изучить когомологические операции, спектральную последовательность Адамса и применения к вычислению колец бордизмов. Вот предварительная программа.

1 часть

- Векторные расслоения и характеристические классы (обзор результатов).
- Определение и простейшие свойства К-групп.
- Комплексная теорема Ботта.
- Операции Адамса и несуществование отображений с нечетным инвариантом Хопфа. Применение к алгебрам с делением.
- Вещественная теорема Ботта и векторные поля на сферах.
- Обобщенные теории (ко)гомологий. Ω -спектры и теорема Брауна о представимости.
- Еще один пример обобщенной теории гомологий: стабильные гомотопические группы. Конструкция Понтрягина-Тома. Применение: теорема Тома о реализуемости рациональных классов подмногообразиями.
- Спектральная последовательность Атии-Хирцебруха.

2 часть

- Определение эллиптического оператора. Спинорные и клиффордовы расслоения. Оператор Дирака.
- Классические эллиптические операторы (оператор Атии-Зингера, лапласиан Ходжа, оператор сигнатуры).
- Теоремы Соболева.
- Псевдодифференциальные операторы.
- Основные теоремы об эллиптических операторах. Теорема Ходжа о разложении.
- Топологическая инвариантность индекса.
- Обобщения понятия индекса (индекс семейства, эквивариантный индекс и т.д.)
- Доказательство теорем об индексе.
- Применения формулы Атии-Зингера: теоремы целочисленности и невложимости.

Вот список литературы. Все эти книги есть в Колхозе, библиотеке Генесис и т.д.

- *Лекции по K-теории*, М. Атия.
- *Курс гомотопической топологии*, Д.Б. Фукс, А. Т. Фоменко.
- *Algebraic Topology*, A. Hatcher. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- *Vector bundles and K-theory*, A. Hatcher. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>.
- *Spin geometry*, H.B. Lawson, M.-L. Michelsohn.
- *Characteristic classes*, J. Milnor, J. Stasheff.
- *Векторные расслоения и их применения*, А.С. Мищенко.