КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА, математический анализ, 2 курс, 4 модуль, 2013
А.М. Красносельский

Лекция 1 (19 апреля 2013)

На этой лекции мы начинаем тему про кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. То, что я вам буду рассказывать — это такая старая-старая классика. Всё будет рассказано в таком старомодном стиле. Другой вариант этого всего вы знаете, по крайней мере что-то. Вы знаете, что такое дифференциальные формы, вы знаете общую абстрактную формулу Стокса. В 2-3-мерных пространствах абстрактная формула Стокса имеет частный вид формул типа формулы Грина. Я построю эту теорию (для пространств размерности 2 и 3) на основании простых вещей, не использующих "почти ничего".

Когда я буду говорить об интегралах, то интеграл Лебега я использовать не буду, если случайно я буду что-то говорить о нём, то я буду специально подчеркивать это. Во всей теории используется только интеграл Римана, во первых, — по традиции. Во вторых, для наших целей не нужен интеграл Лебега. В третьих, интеграл Римана в рассматриваемых задачах удобнее. Ну и в четвёртых, у нас будут интегралы по ориентируемым многообразиям, так интеграл Лебега просто не годится, по крайней мере без существенных переделок.

Конечно, интеграл Лебега на плоском множестве мы уже определили и можно было бы ссылаться на него. Точно так же, как при конструкции пространства L_2 интеграл Лебега необходим, точно так же, для приложений тех вещей, о которых я буду рассказывать сейчас, удобнее и правильнее использовать интеграл Римана. Точно так же, как мера Лебега (и другие счетно аддитивные меры) необходима для интеграла Лебега, для теории вероятностей, стохастических процессов и прочее, точно так же здесь для всех конструкций достаточно аддитивной меры Жордана в 2-3-мерных пространствах, достаточно площадей и объемов.

Конечно, в большинстве случаев, интеграл Лебега будет совпадать с интегралом Римана для кратных интегралов. Однако для интегралов по кривым и поверхностям интеграл Лебега не применим (по крайней мере, без существенных переделок!): принципиально, что это интегралы по ориентированным многообразиям. Соответственно, в равенствах типа формулы Грина есть интегралы по многообразиям, и интеграл по области естественно рассматривать в смысле Римана.

Ещё важное замечание. В первом семестре и в прошлом модуле мы строили кучу хитрых примеров, различные канторовы множества, неизмеримые множества, борелевские множества, сложно устроенные функции... Приводились примеры непрерывных функций, не имеющих производных нигде, сингулярных функций.

Теперь всё будет по-другому. Основной смысл всех конструкций важен для случая хороших множеств, с хорошей границей, гладких функций. Почти всюду будут отсутствовать хитрые, громоздкие контрпримеры. Другие цели — другие объекты, другие методы.

Полгода назад я говорил немножко о мере Жордана на плоскости и вообще, о конечно аддитивных мерах. Сегодня я повторю основную конструкцию. Так как тогда была цель построить счетно-аддитивную меру, то на конструкции Жордановой меры я подробно не останавливался.

Какие-то свойства Жордановой меры являются общими, ими обладает всякая конечная мера на алгебре множеств. Напоминаю, что Жорданова мера — это площадь, объём — привычные вещи.

1. Мера Жордана на плоскости

1. Мера квадратика (замкнутого или открытого или что-то среднее) по определению — квадрат стороны. Мера прямоугольника с параллельными осям сторонами — произведение сторон.

2. Аксиома о конечной аддитивности $\Rightarrow$ определена мера любой фигурки Δ, составленной из конечного числа прямоугольников (с дырками, несвязной). Называется *элементарное множество.* Когда-то давно была доказана лемма: *как ни разбивай элементарное множество на прямоугольники (это можно делать по-разному!) — ответ будет один и тот же.*

3. Внутренняя μ_J и внешняя μ^J жорданова мера любого множества A:

$$\mu_J(A) = \sup\{\xi :\ \xi = \mu(\Delta),\ \Delta \subset A\}, \qquad \mu^J(A) = \inf\{\xi :\ \xi = \mu(\Delta),\ \Delta \supset A\}.$$

4. Ограниченное множество называется измеримым по Жордану, если $\mu_J(A) = \mu^J(A)$.

5. Альтернативная конструкция: берём сетку со стороной 2^{-n} (или ещё какой), теперь берём суммарную меру внутренних квадратиков, меру внешних квадратиков, устремляем n к бесконечности. Оба предела существуют (последовательности монотонные), если они равны, то это называется мерой Жордана.

6. Пример множества неизмеримого по Жордану (рациональные точки квадрата).

7. Естественно, измеримы все круги, многоугольники и прочее, у чего есть площадь. Измеримы криволинейные трапеции, площадь которых определялась определенным интегралом. Про это дальше будет подробно.

8. Множество, имеющее меру ноль по Жордану: если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное объемлющее множество меры меньше ε.

Множество имеющее границу меры ноль по Жордану, измеримо по Жордану. Мера измеримого по Жордану множества равна мере внутренности этого множества равна мере его замыкания.

9. **Мера Жордана равна мере Лебега.**

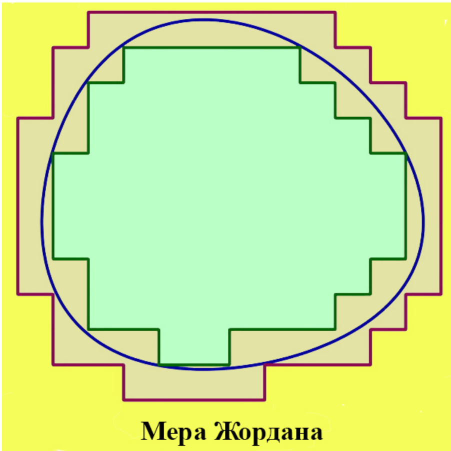
Мера Жордана инвариантна относительно движений евклидова пространства.

10. Приведённое понятие меры ввели Пеано (1887) и Жордан (1892). Конечность количества квадратиков — существенна.

11. Мера Жордана открытого множества может быть не определена.

Примеры. <u>В размерности 2.</u> Прямоугольник, в нем 2 множества с фрактальной границей. Чему равна мера множеств и что остается на границу.

<u>В размерности 1.</u> Дополнение к канторову множеству положительной меры на прямой.



Все множества, граница которых состоит из конечного числа гладких кривых и точек, измеримы по Жордану. Тем не менее, существуют множества, *ограниченные простой замкнутой кривой Жордана, которые не измеримы по Жордану.* На картинке: множество A ограниченное гладкой кривой (синяя кривая), элементарное множество, содержащееся внутри A (зеленое), и содержащее A (коричневое).

Множество измеримо по Жордану, если внутренняя мера равна внешней мере.

Множество, измеримое по Жордану называется квадрируемым в 2-мерном пространстве, кубируемым — в 3-мерном... иногда квадрируемым в n-мерном.

Мера Жордана — это конечно аддитивная мера, как было определено в начале теории меры.

Напомню, было рассказано, что бывают конечно аддитивные меры, и бывают счетно аддитивные. Алгебра множеств, на ней конечно аддитивная мера. σ-алгебра и на ней σ-аддитивная мера. Была построена мера Лебега — главный пример σ-аддитивной меры.

Про конечно аддитивные меры было сказано совсем мало, зато все знают, что такое площадь и объём.

Теперь мы используем именно меру Жордана, она не σ-аддитивна, но, конечно, аддитивна и удовлетворяет всем обычным свойствам меры — только там, где мы писали счетные суммы-объединения, здесь можно писать только конечные суммы. Все примеры со счетными операциями не работают.

Несколько формул.

1. n-Мера цилиндра равна $(n-1)$-мере основания на высоту.

2. $(n+1)$-Мера графика непрерывной функции на n-мерном компакте имеет меру 0.

3. Ясно, что параметрическая непрерывная кривая может иметь большую меру: кривые Пеано.

4. **Теорема:** спрямляемая[1] кривая имеет меру ноль.

Доказательство. Берем кривую длины L, разбиваем на m кусков одинаковой длины, каждый кусок кривой помещаем в круг радиуса L/m (с центром в начальном конце). Теперь получили, что мера кривой не больше суммы мер кругов, сумма мер кругов — это $m\,\pi(L/m)^2 = L^2\pi/m$. При $m \to \infty$ оценка $\to 0$. чтд

5. **Важное следствие:** если граница множества на плоскости состоит из конечного числа кривых C^1, то это множество измеримо по Жордану.

6. Напоминаю, что $\mu(E) > 0$, только если в E есть внутренние точки! Вообще, если E измеримо, то измеримы и его внутренность, и его замыкание, причем все меры равны.

[1]Спрямляемая кривая: порожденная непрерывными функциями $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ ограниченной вариации. Длина кривой L удовлетворяет оценкам $\big(\bigvee(x) + \bigvee(y) + \bigvee(z)\big)/L \in [1, \sqrt{3}]$. Обсудить!

7. Пусть E — измеримое по Жордану множество, $E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$. Через $U_\delta(E_0)$ обозначим δ-окрестность множества E_0.

Лемма. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом конечном разбиении E мелкости меньше δ суммарная мера тех элементов разбиения, что имеют непустое пересечение с E_0, не превосходит ε.*

Покроем множество E_0 конечным числом кубиков одинакового размера, суммарная мера которых не превосходит $\eta = 3^{-n}\varepsilon$ (n — размерность), *a priori* неизвестное ребро каждого из кубиков обозначим через δ. Рассмотрим теперь кубики с теми же центрами и ребрами 3δ. Тогда, если мелкость исходного покрытия будет меньше δ, то все элементы разбиения, что имеют непустое пересечение с E_0, будут принадлежать совокупности кубиков "тройного" размера. Мера этой совокупности не больше $3^n\eta = \varepsilon$. чтд

8. Следующая лемма показывает отличие меры Жордана от меры Лебега. Для меры Лебега измеримое счетное множество рациональных точек плотно, его окрестность имеет полную меру, по Жордану оно не измеримо.

Лемма. $\mu^*(U_\delta(E_0)) \to 0$ при $\delta \to 0$.

2. Кратные интегралы

Пусть задано ограниченное измеримое по Жордану множество E, пусть на нем задана вещественнозначная функция $f(x), x \in \mathbb{R}^2$.

Разобьем дизъюнктно множество E на конечный набор произвольных подмножеств E_k, измеримых по Жордану. Разбиение обозначаем τ. Мелкостью разбиения τ будем называть величину $\delta(\tau) = \min\{\operatorname{diam}(E_k)\}$.

Выберем в каждом E_k точку θ_k и рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma = \sigma(\tau, \theta_k) = \sum_k f(\theta_k)\mu(E_k).$$

Одновременно введем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:

$$\sigma_* = \sigma_*(\tau) = \sum_k \inf_{x \in E_k}\{f(x)\}\mu(E_k), \qquad \sigma^* = \sigma^*(\tau) = \sum_k \sup_{x \in E_k}\{f(x)\}\mu(E_k).$$

Очевидно, что при любых θ_k справедливо соотношение $\sigma_*(\tau) \leqslant \sigma(\tau, \theta_k) \leqslant \sigma^*(\tau)$. Будем говорить, что существует интеграл от f по E, если существует общий предел

$$I = \lim_{\delta(\tau) \to 0} \sigma(\tau, \theta_k) = \lim_{\delta(\tau) \to 0} \sigma_*(\tau) = \lim_{\delta(\tau) \to 0} \sigma^*(\tau),$$

который называется интегралом.

Вместо пределов можно писать inf для верхних сумм и sup для нижних сумм.

Ясно, что определение в размерности 1 почти совпадает с интегралом Римана из 1-го курса. "Почти" — потому что тут множество, по которому ведется интегрирование, не ориентированное. Как было в интеграле Лебега. А в обычном интеграле Римана — это всегда был либо интеграл по $[a, b]$, либо интеграл по $[b, a]$. Причем эти интегралы различаются знаком.

Как и в размерности 1 справедливы теоремы, которые можно считать критериями интегрируемости. Например, функция интегрируема, если

$$\lim_{\delta(\tau)\to 0}\Big(\sigma^*(\tau)-\sigma_*(\tau)\Big)=0.$$

Другой вариант: определить верхний и нижний интегралы и сказать, что функция интегрируема, если верхний интеграл равен нижнему.

В размерности 2, 3 или n — это интеграл Римана, он совпадает с интегралом Лебега. Однако, традиционно, кратные интегралы и основные формулы для них пишут для интеграла Римана. Еще раз повторяю: так удобнее для целей и приложений этой теории.

Точно так же, как в теории интеграла Лебега важно было охватить все измеримые функции (например, чтобы потом рассмотреть L_2), точно так же в этой теории важно рассматривать множества, граница которых состоит их кусочно гладких кривых или поверхностей.

Обозначения интеграла бывают совершенно разные, например:

$$\int_E f(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}^n\ \int_E f(x,y)\,dx\,dy,\ \iint_E f(x,y)\,dx\,dy,\ \int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\ \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Как обычно, интегрируемая по Риману функция ограничена, кроме может быть множества меры 0, лежащего отдельно. Всяческие несобственные интегралы возможны, пока не нужны.

Про ограниченность интегрируемых по Риману функций. Можно придумать пример измеримого по Жордану множества и неограниченной на нём интегрируемой функции.

Для этого достаточно взять в качестве множества на плоскости интервал и на нем взять неограниченную функцию. Отрезок имеет плоскую меру ноль. Теперь на нём берем неограниченную функцию $f(x)$.

Однако, справедлива такая теорема. Пусть для множества E существует последовательность разбиений с мелкостью, стремящейся к нулю, на множества положительной меры. Тогда интегрируемая на E функция ограничена.

Я считаю, что “подсознательно” можно считать, что все функции ограниченные.

Лемма. Пусть E — измеримое по Жордану множество, $E_0\subset E,\ \mu E_0=0$. Рассмотрим разбиения $\tau=\{E_k\}$ множества E. Выделим из множеств E_k множества E_j^*, такие, что $E_0\bigcap E_j^*\neq\emptyset$. Тогда

$$\lim_{\delta(\tau)\to 0}\sum\mu(E_j^*)=0.$$

Отсюда следует, что интегрируемость ограниченной функции на интегрируемом множестве не зависит от значений на границе.

Теорема. *Если функция f непрерывна на измеримом по Жордану компакте, то она на нем интегрируема.*

Доказательство следует из теоремы Кантора о равномерной непрерывности.

Лекция 2 (26 апреля 2013)

На прошлой лекции была введена мера Жордана и интеграл Римана для многомерных областей. Были доказаны некоторые простые теоремы, основная: интеграл Римана от непрерывной функции на измеримом компакте всегда определен.

Теорема. *Если функция ограничена на измеримом по Жордану компакте и множество точек разрыва имеет меру 0 по Жордану, то эта функция интегрируема по Риману.*

В обратную сторону теорема не верная: интегрируемая функция может не быть ограниченной!

Теорема следует из сформулированной ранее леммы про то, что окрестность множества меры ноль по Жордану имеет маленькую меру. Берем разбиение компакта, потом на множестве маленькой меры пишем оценку через меру, а на остальной части - через теоремы Кантора.

Заметим, что на отрезке мы доказали когда-то трудную теорему Римана: *функция интегрируема по Риману на отрезке, если и только если она ограничена и её мера Лебега равна 0.*

Мера 0 по Жордану и мера 0 по Лебегу — существенно разные вещи, конечно, если мера Жордана $=0$, то и мера Лебега $=0$.

Простые свойства кратного интеграла.

1. Главное свойство: $\int_E 1\,dx = \mu(E)$.

2. Линейность интеграла по функции, интегрируемость произведения и частного, если знаменатель отделен от нуля.

3. Интегрируемость по подмножеству

4. Конечная аддитивность по множеству: если f ограничена и интегрируема на E и на G, то интеграл по $E\coprod G$ существует и равен сумме интегралов по E и по G.

Ограниченность функции существенна (пример)!

5. Про ограниченность интегрируемых по Риману функций. Можно придумать пример измеримого по Жордану множества и неограниченной на нём интегрируемой функции. Для этого достаточно взять в качестве множества на плоскости интервал и на нем взять неограниченную функцию. Отрезок имеет плоскую меру ноль. Теперь на нём берем неограниченную функцию.

Пусть для множества E существует последовательность разбиений с мелкостью, стремящейся к нулю, на множества положительной меры. Тогда интегрируемая на E функция ограничена.

6. Монотонность по множеству от положительной функции и по функции: можно интегрировать неравенства.

7. Из интегрируемости ограниченной функции следует интегрируемость модуля и соответствующее неравенство для интегралов. Обратно, как обычно, не верно (функция Дирихле на отрезке).

8. Если интегрируемая неотрицательная функция положительна в точке непрерывности, то интеграл строго положителен на любом множестве, содержащем окрестность этой точки.

9. Счетная аддитивность по множеству. Пусть ограниченная функция f интегрируема на E.

Пусть $E_k \subset E$ — последовательность измеримых по Жордану множеств, удовлетворяющих

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu(E). \qquad \text{Тогда} \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{\mu(E_k)} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Доказательство следует из оценок

$$\left| \int_E f(x)\,dx - \int_{\mu(E_k)} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{E\setminus E_k} f(x)\,dx \right| \leqslant \sup|f|\;\mu(E\setminus E_k) = 0.$$

10. Теоремы о среднем: $\mu(E)\inf f \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \mu(E)\sup f$.

Если функция f непрерывна, то $f(\xi)\mu(E) = \int_E f(x)\,dx$. Конечно, таких ξ много: это линия (поверхность) уровня.

11. Пусть ограниченная функция интегрируема на измеримом множестве E. При изменении её значений на множестве меры 0 с сохранением ограниченности, функция остается интегрируемой.

12. **Следствие.** Ограниченная на $\bar{E}$ функция f интегрируема на $int\,E,\ E,\ \bar{E}$ одновременно и интегралы совпадают.

3. Сведение кратного интеграла к повторному

Пусть множество E, по которому мы интегрируем функцию непрерывную функцию $f(x,y)$, расположено между графиками двух непрерывных функций $\varphi(x) < \psi(x)$:

$$E = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

Было уже доказано, что такое множество E измеримо по Жордану.

Теорема. Справедливо равенство

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Во-первых, функция $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ непрерывна при всех $x \in [a,b]$ (это мы проходили в сентябре).

Разобьем множество E на k^2 множеств $E_{i,j}$ $(i,j = 1,\ldots,k)$ следующим образом.

Рассмотрим функции

$$g_i(x) = \frac{i}{k}\psi(x) + \frac{k-i}{k}\varphi(x), \qquad i = 0,\ldots,k.$$

Очевидно, $g_k = \psi$ и $g_0 = \varphi$. Графики $k-1$ из этих функций нарежут множество E “по горизонтали”, а по вертикали нарежем E вертикальными отрезками

$$\ell_j = \{(x,y) : x = x_j = jb/k + (k-j)a/k,\ y \in [\varphi(x_j), \psi(x_j)]\}.$$

Теперь

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \sum_{i=1}^k \int_{g_{i-1}(x)}^{g_i(x)} f(x,y)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{g_{i-1}(x)}^{g_i(x)} f(x,y)\,dy =$$

Положим $E_{i,j} = \{(x,y):\ x \in [x_{j-1}, x_j], y \in [g_{i-1}(x), g_i(x)]\}$ и

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y)\in E_{i,j}} f(x,y), \qquad M_{i,j} = \sup_{(x,y)\in E_{i,j}} f(x,y), \qquad i,j = 1,\dots,k$$

(надо сказать, что мера границ равна нулю, поэтому можно рассматривать любые неравенства, строгие или нестрогие). Так как

$$\mu(E_{i,j}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (g_i(x) - g_{i-1}(x))dx$$

(это формула криволинейной трапеции из 1-го курса), то

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{g_{i-1}(x)}^{g_i(x)} f(x,y)\,dy \leqslant M_{i,j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{g_{i-1}(x)}^{g_i(x)} dy = M_{i,j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (g_i(x) - g_{i-1}(x))\,dx = M_{i,j}\,\mu(E_{i,j})$$

и, аналогично,

$$m_{i,j}\,\mu(E_{i,j}) \leqslant \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{g_{i-1}(x)}^{g_i(x)} f(x,y)\,dy.$$

Теперь

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_{i,j}\mu(E_{i,j}) \leqslant \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \leqslant \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k M_{i,j}\mu(E_{i,j}).$$

Теперь в этом двойном неравенстве слева стоят нижние суммы Дарбу двойного интеграла, справа стоят верхние суммы Дарбу двойного интеграла, посередине стоит повторный интеграл. Из существования кратного интеграла следует, что верхние и нижние суммы Дарбу стремятся к общему пределу.

Для доказательства утверждения теоремы осталось доказать, что мелкость разбиения стремиться к нулю, это следует из построения самого разбиения. чтд

Философия в том, что есть другой повторный интеграл, что область можно разбивать на куски и считать его через последовательные разбиения.

Формулы приведения к повторному интегралу в тройном интеграле.

Рассказать, что можно разбивать многими способами на 2 последовательных интеграла и на цепочки трех и более повторных интегралов.

4. Замена переменных в кратном интеграле

Сведения из линейной алгебры.

Лемма. *При линейном отображении A любой параллелограмм P площади $\mu(P)$ переходит в параллелограмм $A(P)$ площади $\mu(A(P)) = |\det(A)|\mu(P)$.*

Я думал, что вы должны это знать. На прошлой лекции мы обсудили это, и я не собирался доказывать. Посоветовался, решил почти честно рассказать. Тем более, что как оказалось в линейной алгебре нет никакой Жордановой меры, поэтому никакого честного доказательства и быть не могло. Я посмотрел, как это делается в различных учебниках, везде либо делаются ссылки на курс линейной алгебры, либо пишется, что "очевидно", либо предлагается доказать это в качестве упражнения.

Когда я давал определение меры Жордана, я ничего не сказал про инвариантность меры относительно каких-то преобразований. Или эквивалентную теорему о том, что введенная Жорданова мера (площадь, объём) инвариантна относительно выбора базиса.

Относительно сдвигов — очевидно. А вот относительно поворотов — все сложно. На плоскости легко рассказать, почему мера Жордана, введённая относительно какой-то системы координат, единичного квадрата, расположенного криво, всё равно 1 (разрежем на треугольники и всё получится). А уже в трехмерном пространстве возникают проблемы.

Основной вопрос такой. Есть система координат СК1 и система координат СК2, ортогонально повернутая. Соответственно есть мера1 и мера2. Рассмотрим любой кубик K со стороной 1, со сторонами, параллельными СК1. Его мера2 - это константа C, не зависящая от кубика K (здесь мы пользуемся инвариантностью относительно сдвигов). Соответственно, мера2 от любого кубика со сторонами, параллельными СК1, со стороной $h = * h^n$. Поэтому мера2 любого тела $= C^*$мера1 его же.

Теперь возьмём шарик. Какой-то. Он инвариантен относительно всех поворотов. Поэтому его мера1 $=$ мере2. Следовательно, $C = 1$ и мера не зависит от выбора ортонормированной системы координат. Следовательно, мера инвариантна относительно вращения.

Теперь перейдем к формуле для преобразования меры при линейном преобразовании.

Возьмем матрицу A в некотором ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$. Составим из векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$ параллелепипед. Покажем, что его мера равна модулю определителя матрицы A.

Берем n векторов в $\mathbb{R}^n$, составляем из их координат матрицу B. Объем параллелепипеда — модуль определителя этой матрицы. Делаем по индукции.

Для $\mathbb{R}^2$ — через комплексные числа. Есть 2 вектора, комплексные числа $z_1 = a + bi = r_1 e^{i\psi_1}$, $z_2 = c + di = r_2 e^{i\psi_2}$. Площадь параллелограмма $=$ произведению сторон на модуль синуса угла:

$$S = r_1 r_2 |\sin(\psi_1 - \psi_2)| = r_1 r_2 |\sin\psi_1 \cos\psi_2 - \sin\psi_2 \cos\psi_1| = |bc - ad - bc| = |\det(A)| = |\Im m(z_1 z_2)|.$$

Далее, пусть есть квадратная матрица полного ранга, образованная n векторами общего положения. Мы сначала выберем другой базис поворотом предыдущего так, чтобы $n-1$ вектор (например, все, кроме первого) попали в базисную гиперплоскость. Модуль определителя не меняется. Мера параллелепипеда не меняется. Теперь получили матрицу, у которой в 1м столбце только 1й элемент ненулевой. Модуль этого ненулевого элемента есть высота параллелограмма. Осталось увидеть, что мера цилиндра есть высота на меру основания и дальше по индукции. Для этого надо пространство разбить на маленькие кубики размерностью n и со стороной δ. При вычислении количество кубиков на границе имеет порядок δ^{-n+1}. Кубиков внутри будет $(S_{osn}/\delta^{n-1}) \times (h/\delta)$ объём кубика равен δ^n и всё доказано.

Замена переменных.

Опять я буду всё писать в двумерном пространстве, можно считать, что n-мерное.

Пусть G — открытое множество на плоскости R^2_{uv}, пусть G^* — открытое множество на плоскости R^2_{xy}. Пусть F — отображение $G \to G^*$.

Отображение задаем парой функций $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$.

Будем предполагать, что:

1) F взаимно однозначно,

2) F непрерывно дифференцируемо,

3) якобиан $J(u, v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ не обращается в ноль на G.

Естественно, по теоремам с 1-го курса обратное отображение тоже непрерывно дифференцируемо и тоже не вырожденное.

Лемма. Пусть $\Gamma \subset G$ — открытое множество. Тогда $F(\Gamma)$ также открытое множество и $\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma)$.

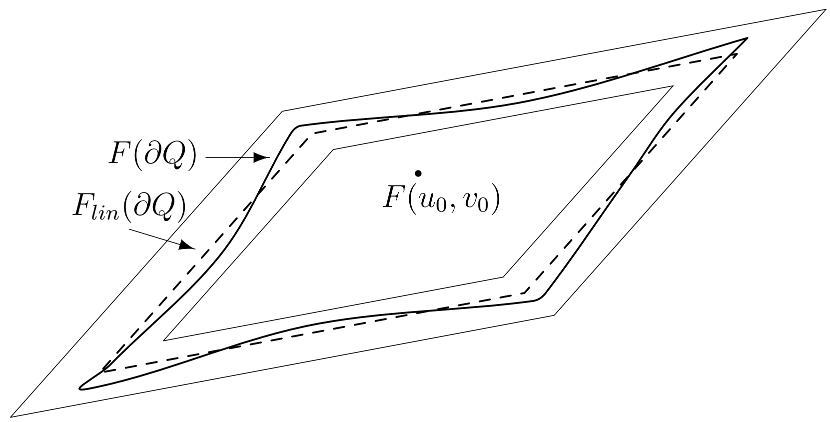
1) Берем внутреннюю точку $x \in \Gamma$. Если она не переходит во внутреннюю точку, то есть такие точки $y_n \to F(x)$, что $F^{-1}(y_n) \notin \Gamma$. Ясно, что этого не может быть, так как $y_n \to F(x) \ \Rightarrow F^{-1}(y_n) \to x$, а x — внутренняя точка.

2) Пусть $x \in \partial\Gamma$. Тогда найдутся $x_n, y_n \to x,\ x_n \in \Gamma, y_n \notin \Gamma$. Очевидно, что при этом $F(x_n), F(y_n) \to F(x),\ F(x_n) \in F(\Gamma), F(y_n) \notin F(\Gamma)$, то есть $F(x) \in \partial F(\Gamma)$. Аналогично, $F(x) \in \partial F(\Gamma) \ \Rightarrow\ x \in \partial\Gamma$. чтд

Если в сделанных предположениях граница $\partial\Gamma$ состоит из конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых, то граница $\partial F(\Gamma)$ также состоит из конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых, множества Γ и $F(\Gamma)$ квадрируемы.

Теорема о геометрическом смысле модуля якобиана. В сделанных предположениях образ $F(S)$ квадрата S с маленькой стороной h, содержащего точку (u_0, v_0) удовлетворяет равенству

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)| + o(u_0, v_0, h).$$



Геометрический смысл модуля якобиана.

Схематично эта теорема доказана на рисунке. Сплошная жирная линия $F(\partial Q)$ — образ границы ∂Q квадратика Q при нелинейном отображении. Пунктирная ломанная $F_{lin}(\partial Q)$ — образ ∂Q при линейном отображении $F_{lin} = dF(u_0, v_0)$. Тонкие сплошные линии — это схематично изображенные границы возможного местоположения $F(\partial Q)$, ширина полосы между ними порядка $o(h)$.

В силу непрерывной дифференцируемости отображения F для каждой точки $x \in \partial Q$ расстояния между точками $F(x)$ и $F_{lin}(x)$ — величина порядка $o(h)$, так как $|F(x) - F(x_0) - F_{lin}(x - x_0)| = o(|x - x_0|)$.

Площадь рамки между границами мала по сравнению с площадью квадратика, площадь образа внутренности квадратика почти равна площади пунктирного параллелограмма, чтд

Более формальные формулы довольно громоздки даже для плоскости.

Теорема. Справедливо равенство

$$\int_{G^*} f(x,y)dxdy = \int_G f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности считаем функцию f положительной: докажем для положительных, значит для $f + M$, $M > 0$ и для $f \equiv M$, значит и для $f + M - M$.

Шаг 2. Пусть есть квадрат Q со стороной h, содержащий точку (u_0, v_0). Тогда

$$\int_{F(Q)} f(x,y)dxdy \leqslant \int_Q f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

В предположении противного при некотором $\varepsilon_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{F(Q)} f(x,y)dxdy \geqslant (1 + \varepsilon_0) \int_Q f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Разобьем квадрат Q на 4 квадрата $Q_1^k,\ k = 1,2,3,4$ вдвое меньшей стороны, хотя бы для одного $k = k_1$ должно быть справедливо аналогичное неравенство

$$\int_{F(Q_1^{k_1})} f(x,y)dxdy \geqslant (1 + \varepsilon_0) \int_{Q_1^{k_1}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Разобьем $Q_1^{k_1}$ на 4 квадрата Q_2^k, $k = 1, 2, 3, 4$, хотя бы для одного $k = k_2$ должно быть ... и так далее. Полученная последовательность стягивающихся квадратов имеет общую точку (u_0, v_0).

Неравенства для интегралов можно переписать в виде

$$\mu(F(Q_n^{k_n}))(f(x_0,y_0)+o(2^{-n}h)) \geqslant (1+\varepsilon_0)\mu(Q_n^{k_n})\big(f(x_0,y_0)+o(2^{-n}h)\big)\left(\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} + o(2^{-n}h)\right),$$

сократили на $f(x_0, y_0) > 0$, противоречит теореме о геометрическом смысле модуля якобиана.

Шаг 3. Аналогично, докажем неравенство в другую сторону:

$$\int_{F(Q)} f(x,y)dxdy \geqslant \int_Q f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Поэтому для любого квадратика справедливо равенство

$$\int_{F(Q)} f(x,y)dxdy = \int_Q f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Шаг 4. Теперь рассмотрим любую фигуру S, составленную из квадратиков. В силу предыдущего равенства для произвольного квадрата справедливо равенство

$$\int_{F(S)} f(x,y)dxdy = \int_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Шаг 5. Теперь достаточно рассмотреть на плоскости квадратную решетку, аппроксимировать множество G фигурой S и перейти к пределу. чтд

Замечания.

1. Теорема о замене переменных в кратном интеграле справедлива для несколько более широкого класса функций f.

2. **Конкретные замены переменных.**

2.1. Полярная замена переменных. На плоскости формулы $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ преобразуют полярные координаты точки в декартовы. Замена переменных осуществляется по формуле

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_P f(r\cos t, r\sin t)\,r\,dr\,dt.$$

Естественно, применять полярную замену координат хорошо в ситуациях, когда граница области зависит от $x^2 + y^2$.

2.2. Цилиндрическая замена переменных. В $\mathbb{R}^3$ формулы $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = z$ преобразуют цилиндрические координаты точки в декартовы. Замена переменных осуществляется по формуле

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_P f(r\cos t, r\sin t, z)r\,dr\,dt\,dz.$$

2.3. Сферическая замена переменных. В $\mathbb{R}^3$ формулы $x = r\cos t\sin\psi$, $y = r\sin t\sin\psi$, $z = r\cos\psi$ преобразуют сферические координаты точки в декартовы. Замена переменных осуществляется по формуле

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_P f(r\cos t\sin\psi, r\sin t\sin\psi, r\cos t)r^2\sin\psi\,dr\,dt\,d\psi.$$

Лекция 3 (17 мая 2013)

В прошлом месяце я рассказал, что такое мера Жордана и интеграл Римана на множествах в $\mathbb{R}^n$. Про интегралы я рассказал 2 основных способа их вычисления: переход к повторным интегралам и замену переменных.

Сегодня мы начинаем новую тему — криволинейные интегралы.

5. Криволинейные интегралы

Философия. На отрезке на прямой мы определяли 2 разных интеграла — интеграл Римана “как на первом курсе” и интеграл Лебега (или кратный интеграл как на предыдущих лекциях). Эти интегралы различались принципиально: первый был интеграл по ориентируемому множеству, второй — по неориентируемому. При этом значения интеграла совпадали с точностью до знака.

Близкая ситуация в криволинейных интегралах, интегралах по кривым. Бывают криволинейные интегралы по неориентирумым кривым, а бывают — по ориентируемым. На кривых разные интегралы принимают уже разные значения, интегрируются разные объекты, они имеют разный геометрический и физический смысл.

Такая ситуация связана в первую очередь с тем, что оба типа интегралов востребованы при решении физических задач.

Криволинейные интегралы первого рода

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ без особых точек ($r' \neq 0$). Она определяет кривую Γ в пространстве, кривую без особых точек, но с возможными самопересечениями.

Определение. Пусть функция f со значениями в $\mathbb{R}$ определена на множестве Γ и непрерывна. Тогда величина

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds := \int_a^b f\big(r(t)\big)\, |r'(t)|\, dt \equiv \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой Γ.

Физик легко видит, что этот интеграл позволяет найти массу материальной кривой при переменной линейной плотности, центр её тяжести, моменты инерции.

КИ не зависит от параметризации. Пусть $g(\tau) : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — монотонная непрерывно дифференцируемая функция, $g' \neq 0$. Либо $g(\alpha) = a, g(\beta) = b, \operatorname{sign} g' \equiv 1$, либо $g(\alpha) = b, g(\beta) = a, \operatorname{sign} g' \equiv -1$. Теперь

$$\int_\alpha^\beta f\big(r(g(\tau))\big)\, |r'(g(\tau))|\, |g'(\tau)|\, d\tau = (\operatorname{sign} g') \int_\alpha^\beta f\big(r(g(\tau))\big)\, |r'(g(\tau))|\, g'(\tau)\, d\tau =$$
$$= (\operatorname{sign} g') \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f\big(r(t)\big)\, |r'(t)|\, dt = \int_a^b f\big(r(t)\big)\, |r'(t)|\, dt$$

Со случая непрерывной функции можно получить обобщение на интегрируемые по Риману функции.

Гладкая кривая является спрямляемой. В качестве хорошего параметра удобно выбирать переменную длину кривой. Тогда (S — длина кривой)

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_0^S F(r(s))\,ds, \qquad \int_\Gamma ds = S.$$

Можно определять криволинейный интеграл через интегральные суммы. Можно определять криволинейный интеграл для любой спрямляемой кривой.

Я писал в $\mathbb{R}^3$, можно написать в R^2 или в $\mathbb{R}^n$.

Криволинейные интегралы второго рода.

Зафиксируем систему координат в $\mathbb{R}^3$. Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ без особых точек ($r' \neq 0$). Пусть $\Gamma = r([a,b])$ — гладкая ориентированная кривая в $\mathbb{R}^3$ (непрерывно дифференцируемая и производная не обращается в 0).

Ориентированная — это означает, что на ней выбрано начало-конец, или, что на ней выбрано направление (тогда можно и для замкнутого контура определить направление.

Единичный вектор $e = e(t)$ касательной к Γ можно записать в виде $e = r'(t)/|r'(t)|$ или в виде

$$e = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{ds}{ds},\right) = (\cos\alpha, \cos\beta\cos\gamma),$$

где s — параметризация кривой её длиной, а α, β, γ — углы касательного вектора e с базисными векторами.

Пусть на кривой задано векторное поле $F = \{P, Q, R\}$. Можно сказать, что на кривой задана 1-форма $Pdx + Qdy + Rdz = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$. Это одно и то же.

Определение. Величина

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz := \int_a^b (F, r')dt = \int_a^b \left(Px' + Qy' + Rz'\right)\,dt$$

называется *криволинейным интегралом второго рода* от формы или от векторного поля по Γ.

В частности, например, $\int_\Gamma P\,dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt$. Легко запомнить: в формуле для интеграла нужно всего лишь подставить вместо x, y, z параметризацию $x(t), y(t), z(t)$ и дифференциалы dx, dy, dz записать как интегралы от t: $dx = x'dt$ и т.д.

Естественно, на плоскости тоже можно рассмотреть кривую, на ней рассмотреть плоское векторное поле и определить интеграл по этой кривой:

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy := \int_a^b (F, r')dt = \int_a^b \left(Px' + Qy'\right)\,dt.$$

Такой интеграл в элементарной физике — это работа силы при движении точки по кривой линии.

Для того, чтобы определение было осмысленным, надо, чтобы соответствующие интегралы существовали. Мы будем все время предполагать непрерывность векторного поля, поэтому интегралы по кусочно гладким кривым существуют.

Интеграл второго рода можно выразить через интеграл от первого рода:

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

следует из $x' = \cos\alpha|r'|, y' = \cos\beta|r'|, z' = \cos\gamma|r'|$, ориентация спрятана в знаки косинусов.

Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации фиксированной ориентации и меняет знак при параметризации другой ориентации.

Оба криволинейных интеграла обладают свойством аддитивности по кривым: Если разбить гладкую кривую на два куска, то интеграл по кривой будет равен сумме интегралов по кускам. Это свойство положим в качестве определения интеграла по кусочно гладким непрерывным кривым. **Определение** интеграла по кусочно гладкой кривой, как суммы интегралов по гладким кускам.

Свойство. Интеграл от константы по замкнутому контуру равен нулю: если $A = (a_z, a_y, a_z), B = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\int_{AB} dx = b_x - a_x, \quad \int_{AB} dy = b_y - a_y, \quad \int_{AB} dz = b_z - a_z,$$

то есть не зависит от кривой.

Основная лемма. Пусть есть компакт $E \subset \mathbb{R}^3$, пусть есть кусочно гладкая кривая $\Gamma \subset E$, её параметризация $r(t)$, разбиение τ отрезка $[a,b]$ точками t_k, возникающая ломанная $\Lambda_\tau \subset E$, векторное поле P, Q, R, непрерывное на E. Тогда

$$\lim_{\delta(\tau)\to 0} \int_{\Lambda_\tau} Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz.$$

Доказательство проведем для случая $Q \equiv R \equiv 0$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на мелкие кусочки точками t_i. Так, чтобы точки r_{t_i} мелко разбили кривую Γ. Настолько мелко, чтобы $|P(r(t)) - P(r(t_i))| < \eta$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ при всех i.

Теперь рассмотрим ломанную с таким вот мелким разбиением и сравним интеграл по кривой с интегралом по хорде:

$$\Delta_i = \int_{\widehat{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}} P\,dx - \int_{\overline{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}} P\,dx = \int_{\widehat{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}\,\overline{r_{t_{i+1}}, r_{t_i}}} P\,dx = \int_{\widehat{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}\,\overline{r_{t_{i+1}}, r_{t_i}}} (P - P(r(t_i)))\,dx$$

(интеграл по замкнутому контуру от константы равен нулю!). Теперь $|\Delta_i| < 2\eta(s(t_{i+1}) - s(t_i))$, следовательно, $\sum |\Delta_i| \leqslant 2\eta S$ (S — длина кривой Γ). чтд

Естественно, для криволинейных интегралов справедливы и другие теоремы о предельном переходе. Например, если всё непрерывно и $P_n \rightrightarrows P, Q_n \rightrightarrows Q, R_n \rightrightarrows R$ на Γ, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma P_n dx + Q_n dy + R_n dz = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz.$$

Эту формулу легко увидеть, например, из определений. Однако, она ниже не используется и в виде отдельной теоремы такой факт не формулируется.

Формула Грина

Напомню, что положительная ориентация контура относительно области — это когда движение по контуру оставляет область слева.

Плоские кривые. Написать основные формулы на плоскости:

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)ds.$$

Теорема (Формула Грина). Пусть D — ограниченная связная плоская область, граница которой ∂D состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_j ($\partial D = \coprod_{i=1}^k \Gamma_j$), ориентированных положительно относительно области D. Пусть на замыкании $\bar{D}$ области D задано непрерывно дифференцируемое векторное поле (P, Q). Тогда справедлива *формула Грина*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Плоскую область D назовем *простой относительно оси* Ox, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) : \ \varphi(y) < x < \psi(y), c < y < d\}$$

где $\varphi < \psi$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$, аналогично, назовем D *простой относительно оси* Oy, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) : \ \varphi(x) < y < \psi(x), a < x < b\}$$

где $\varphi < \psi$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$.

Плоскую область назовём *простой*, если она является простой относительно одной из координатных осей. ***Любая выпуклая область является простой относительно обеих осей.***

Определение. Будем говорить, что ограниченная плоская область D разрезана на конечное число областей D_i, если

1. $\bigcup D_i \subset D$;
2. $D_j \bigcap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
3. $\bigcup \bar{D}_i = \bar{D}$;
4. $(\partial D_i \bigcap \partial D_j) \bigcap D$ при $i \neq j$ является либо пустым множеством, либо точкой, либо промежутком на какой-либо прямой.

Лемма. *Если ограниченная плоская область D разрезана на конечное число областей D_i, причем все границы всех областей являются кусочно гладкими кривыми, то из справедливости ФГ для областей D_i следует ФГ для области D.*

Утверждение леммы легко вытекает из определений, и похоже на конструкции из ТФКП.

Доказательство ФГ состоит из нескольких частей. Часть первая — доказательство ФГ для *простых* областей. Часть вторая — распространение ФГ на более сложные области — которые можно разрезать на конечное число простых. Часть третья — доказательство ФГ в общем случае.

Часть I.

Достаточно установить ФГ при $Q = 0$, так как случай $P = 0$ рассматривается аналогично, вместе они приводят к ФГ общего вида.

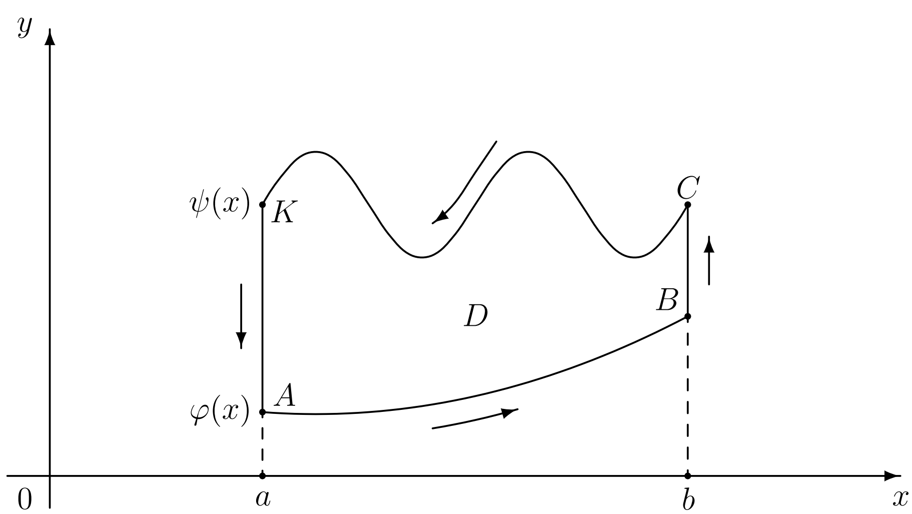
Шаг 1. Докажем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D} P\,dx$$

в случае, когда D — простая относительно оси Oy. Воспользуемся формулой сведения двойного интеграла к повторному и формулой Ньютона-Лейбница:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx =$$
$$= \int_{KC} P(x,y)dx - \int_{AB} P(x,y)dx = -\int_{CK} P\,dx - \int_{AB} P\,dx = -\int_{\partial D} P\,dx.$$

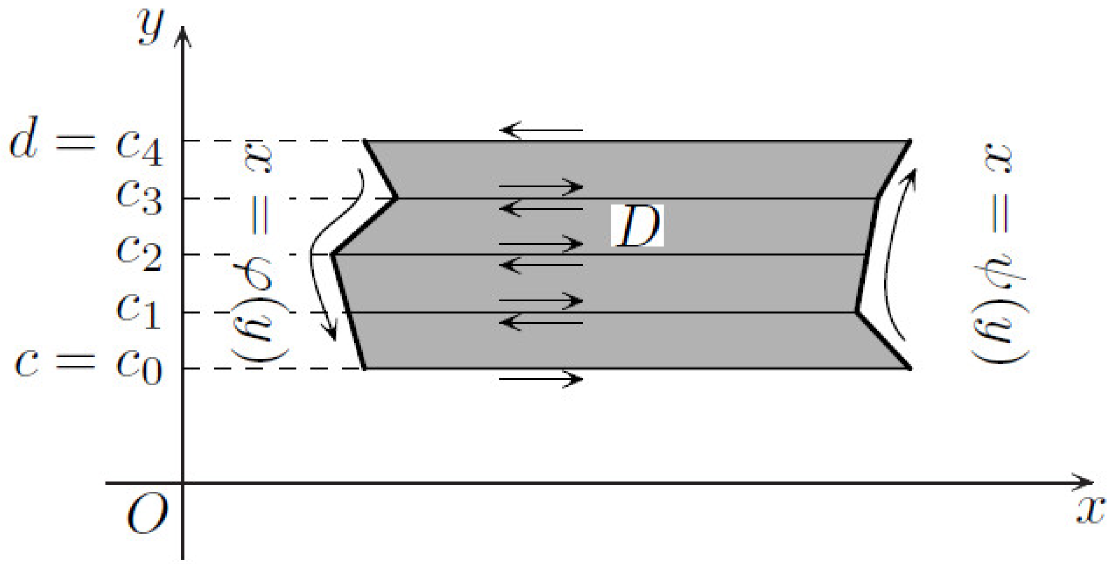
на последнем шаге мы воспользовались тем, что интеграл от формы $P\,dx$ по вертикальным отрезкам DA и BC равен нулю.



Шаг 2. Докажем ту же самую формулу

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D} P\,dx$$

в случае, когда D — простая относительно оси Ox, причем боковые функции — это ломаные, состоящие из конечного числа отрезков. Разрежем область на трапеции, ориентируем все границы, очевидно, что трапеции, если надо, легко разрезать на простые области относительно оси Oy, этот случай рассмотрен.



Шаг 3. Перейдем к случаю, когда D — простая относительно оси Ox общего вида, то есть графики граничных функций от y не ломанные, а просто гладкие функции.

Впишем в боковые части границы ломанные, с достаточно мелким разбиением. Для областей, ограниченных этими ломанными, напишем ФГ. Теперь перейдем в этой формуле к пределу. Для двойного интеграла пользуемся непрерывностью производной и малостью меры плоских множеств между ломанной и кривой. Для криволинейного интеграла пользуемся утверждением[2].

На этом шаге есть маленькая проблема, которую я счёл автоматически разрешенной, когда нарисовал, что ломанные не пересекаются. Об этом следует задуматься, но проблема легко преодолима: сначала замечаем, что боковые границы отстоят друг от друга на положительное число, а потом рассматривать только достаточно мелкие ломанные.

Шаг 4. Переход от случая, рассмотренного на шаге 3 к общему случаю, когда левая и правая границы кусочно гладкие очевиден: нарежем горизонтальными линиями на области с гладкими боковыми границами.

Замечание. Заметим, что такой некрасивый шаг 2 (или его аналог) необходим. Формулу

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy$$

хорошо преобразовать не удается.

Часть 2.

Если область D можно разрезать на конечное число простых областей, то ФГ для D очевидно следует из ФГ для этих простых областей.

Часть 3.

Осталось доказать следующий факт: *ограниченная связная плоская область D, граница которой ∂D состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких кон-*

[2]Есть кривая Γ, её параметризация $r(t)$, разбиение τ отрезка $[a, b]$ точками t_k, возникающая ломанная Λ_τ, векторное поле P, Q, R, непрерывное в ε-окрестности кривой Γ, тогда предел интегралов по ломанным равен интегралу по кривой.

туров Γ_j *(*$\partial D = \coprod_{i=1}^k \Gamma_j$*), ориентированных положительно относительно области* D*, может быть разрезана на конечное число простых областей.*

Берем гладкую кривую AB, покажем, что найдется близкая ломанная (близкая — чтобы не задевать остальные куски границы) с концами на кривой, такая что область между ломанной и кривой является простой.

Это следует из такого утверждения: пусть есть пара непрерывных функций $x(t), y(t), t \in [a, b]$, пусть $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$. Тогда отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых хотя бы одна функция x или y имеет постоянный знак.

Для доказательства надо взять ненули $x(t)$, это открытое множество, оно состоит из интервалов Δ_x^k, надо взять ненули $y(t)$, это открытое множество, оно состоит из интервалов Δ_y^j. Из покрытия отрезка интервалами Δ_x^k и Δ_y^j надо выбрать конечное подпокрытие.

Таким образом, мы сможем около каждой гладкой кривой, составляющей часть границы, построить ломанную так, чтобы все куски были простые относительно одной из осей. Ломанную надо строить, чтобы не налезть на другие части границы.

Осталось проследить, чтобы ломанные были настолько близки друг к другу, что бы они не пересекались.

В случае границы без клювов — проблем не возникает. А в случае клюва (это точка, где вектор касательной разворачивается на π) надо его отдельно отрезать маленьким отрезком, получившийся рожок — всегда простая область.

Формула Грина доказана.

Самый замечательный криволинейный интеграл на плоскости. Пусть $(P, Q) = (0, x)$ или $-\frac{1}{2}(-y, x)$ или $(-y, 0)$. Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ и по ФГ

$$\mu(D) = \int_{\partial D} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx.$$

Комментировать все последние формулы не буду, но формула

$$\mu(D) = -\int_{\partial D} y\,dx$$

для площади криволинейной трапеции под графиком функции $y(x)$ очевидна: интеграл по вертикальным боковым сторонам равен 0 из-за dx, интеграл по основанию равен 0 из-за y, интеграл по графику функции равен как раз определенному интегралу (минус из за движения справа налево).

Лекция 4 (24 мая 2013)

На прошлой лекции мы ввели криволинейные интегралы первого и второго рода, в том числе самый замечательный интеграл
$$\mu(D) = -\int_{\partial D} y\,dx$$
для площади. Эта замечательная формула следовала из *формулы Грина*
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$
В этой формуле ориентация выбирается положительная, то есть при движении вдоль кривой область находится слева.

Теперь мы продолжим изучение криволинейных интегралов.

6. Потенциальные векторные поля

Вернёмся в $\mathbb{R}^3$.

Определение. Векторное поле $\vec{A} = (P, Q, R)$ называется потенциальным, если есть такая функция $U(x, y, z)$, что
$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$
При этом функция U называется потенциалом поля $\vec{A}$. Это же записывают иначе: $\vec{A} = \operatorname{grad} U = \nabla U$ или $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Здесь ∇ — символический вектор “набла” $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$. Градиент f равен набла f.

Определение. Пусть Γ — замкнутый гладкий контур. Интеграл $\int_\Gamma (\vec{A}, d\vec{r})$ называется циркуляцией поля $\vec{A}$ по контуру Γ.

Теорема. Пусть есть непрерывное векторное поле $\vec{A}$ в области $G \in \mathbb{R}^3$. Тогда следующие 3 условия эквивалентны.

(1) Поле потенциально в G;

(2) Для любого кусочно гладкого контура циркуляция поля равна нулю.

(3) Для любых двух точек интеграл $\int_\Gamma (\vec{A}, d\vec{r})$ по любой кусочно гладкой кривой из B в C не зависит от выбора кривой.

Из (2) следует (3) и из (3) следует (2) — очевидно.

Покажем, что из (1) следует (3). Пусть поле $\vec{A}$ потенциально и пусть U — его потенциал. Пусть $\widehat{BC}$ — гладкая кривая с началом в точке B и с концом в точке C, задаваемая вектор функцией $\{x(t), y(t), z(t)\},\ t \in [a, b]$. Тогда
$$\int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz')\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(x(t), y(t), z(t)))\,dt = U(C) - U(B).$$

Наконец, покажем, что из (3) следует (1). Зафиксируем точку B и положим
$$U(C) = \int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где интегрирование берется по произвольной кривой с началом в точке B и с концом в точке C. Такое определение функции корректно, по условию (3). Покажем, что $\operatorname{grad} U = (P, Q, R)$. Установим только равенство $\partial U/\partial x = P$. Обозначим $C = (x, y, z), C_{\Delta x}(x + \Delta x, y, z)$

$$\Delta U = U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z) = \int_{\overline{CC_{\Delta x}}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y_0, z_0)dt = \Delta x P(\theta, y, z),$$

где $\theta \in [x, x+\Delta x]$. отсюда следует $\partial U/\partial x = P$ чтд.

Из доказательства теоремы следует явный вид потенциала в виде формулы

$$U(X) = \int_{BX} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Введем в рассмотрение *ротор* (вихрь) поля $\vec{A}$:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k.$$

Определение. Поле называется безвихревым в области G, если $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$ на G.

Теорема. Если C^2-поле потенциально, то оно безвихревое. Если область является образом шара (точнее, если всякая поверхность, гомеоморфная сфере, стягиваема в точку, называется — “поверхностная односвязность”), то безвихревое поле потенциально.

В одну сторону — очевидно и следует из равенства нулю смешанных производных.

В другую — докажем потом, как следствие формулы Стокса.

Теорема. Пусть в плоской односвязной области G задано C^2-поле, причем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в G. Тогда это поле потенциально.

Достаточно показать, что интеграл вдоль любого замкнутого контура равен нулю, а он равен 0 в силу формулы Грина.

Контрпример. Односвязность существенна. Плоское поле $\vec{A} = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2)$ задано везде, кроме начала координат. Оно безвихревое: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$. Поле $\vec{A}$ не потенциально: отлична от нуля его циркуляция по окружности $\gamma = \{x + iy = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$:

$$\int_\gamma (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t\, \cos t)dt = 2\pi \neq 0.$$

7. Элементы теории поверхностей в $\mathbb{R}^3$

Гладкая поверхность: C^1-отображение $\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющее

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{на} \quad D,$$

а также образ такого отображения.

Гладкая поверхность *простая*, если отображение $(u, v) \mapsto S$ взаимно однозначно.

Координатные линии: семейства кривых $\{\vec{r}(u, v_0), \vec{r}(u_0, v),\ \ (u, v_0), (u_0, v) \in D\}$. Вектора $\vec{r}_u'(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v'(u_0, v_0)$ — касательные к координатным линиям.

Пусть есть плоская область D, гладкая поверхность $S = \vec{r}(u, v)$, точка $M = \vec{r}(u_0, v_0)$, кривая $\Gamma = \{u(t), v(t), t \in [a, b]\}$ на плоскости (u, v), проходящая через (u_0, v_0) при $t = t_0$.

Тогда кривая $\gamma = \vec{r}(u(t), v(t))$ лежит на поверхности S, проходит через точку M. Касательный вектор к γ в точке M определяется равенством

$$\vec{r}_t'(t_0) = \vec{r}_u'(u_0, v_0)u_t'(t_0) + \vec{r}_v'(u_0, v_0)v_t'(t_0).$$

Касательная плоскость — это плоскость, проходящая через точку гладкой поверхности, параллельная векторам $\vec{r}_u'(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v'(u_0, v_0)$.

Можно ввести понятие касательной прямой к кривой, тогда касательная плоскость в точке — множество всех касательных прямых ко всем кривым, проходящим через эту точку.

Уравнение касательной плоскости через смешанное произведение: $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_u', \vec{r}_v') = 0$. Векторное произведение — нормаль, касательная плоскость перпендикулярна нормали и проходит через точку M. В координатной форме уравнение плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = 0.$$

Определение нормальной прямой и нормального вектора. Обозначим $A = \det(\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)})$,

$$B = \det(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}),\ C = \det(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}).\ \text{Тогда}\quad \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Условие невырожденности про ранг имеет вид $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ или, что то же, $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq \vec{0}$

Прямая, проходящая через точку $M \in S$ и перпендикулярная касательной плоскости в M, называется *нормальной прямой* к поверхности.

Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой называется нормалью. "Основная" нормаль — это вектор $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$. Уравнение нормальной прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{y_u' z_v' - z_u' y_v'} = \frac{y - y_0}{z_u' x_v' - x_u' z_v'} = \frac{z - z_0}{x_u' y_v' - y_u' x_v'}.$$

Естественно, если какое-то из чисел A, B, C равно 0, то соответствующая координата — константа.

Явно заданная поверхность: $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $\vec{r}_x' = (1, 0, f_x')$, $\ \vec{r}_y' = (0, 1, f_y')$

$$\vec{r}_x' \times \vec{r}_y' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = -f_x'\vec{i} - f_y'\vec{j} + \vec{k}.$$

Уравнение касательной плоскости принимает вид

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0),$$

уравнение нормальной прямой в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = -(z - z_0).$$

Естественное переписывание всех формул для поверхностей, параметризованных y, z или x, z.

Преобразование всего при замене параметризации.

Пусть есть гладкая поверхность: отображение $\vec{r} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{F}(t, s) : \bar{D}_1 \to \bar{D},\ u = \varphi(t, s), v = \psi(t, s)$ и поверхность S_1, определяемую отображением $\vec{\rho}(t, s) = \vec{r}(\varphi(t, s), \psi(t, s))$.

Ясно, что если замена параметризации "хорошая" (однозначная-гладкая-невырожденная в каких-то смыслах), то поверхность, как геометрические объекты в $\mathbb{R}^3$ поверхности S и S_1 совпадают, формально, конечно, как отображения это разные поверхности. Будем считать, что поверхности S и S_1 — это разные параметризации одной и той же поверхности, если замена параметров $\mathcal{F}$ является *допустимой*. Это по определению означает, что

1. $\mathcal{F}$ взаимно однозначное отображение;

2. $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемое и обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ также непрерывно дифференцируемое;

3. $\det(\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)}) \neq 0$ ($\Rightarrow \det(\dfrac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)}) \neq 0$).

Так как $\vec{\rho}'_t = \vec{r}'_u \varphi'_t + \vec{r}'_v \psi'_t$ и $\vec{\rho}'_s = \vec{r}'_u \varphi'_s + \vec{r}'_v \psi'_s$, то $\vec{\rho}'_t \times \vec{\rho}'_s = \det(\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)})\, \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$.

Так как нормаль и касательная — геометрические объекты, то при замене параметризации они сохраняются.

Обсудить локальное и глобальное представление в виде явно заданной поверхности. Глобальное — не всегда возможно, локальное всегда (по определению гладкой поверхности: $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Ориентация гладкой поверхности. Пусть S — гладкая параметрически заданная поверхность, единичный вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$$

является непрерывной функцией на $\bar{D}$, равно как вектор $-\vec{n}$. Обе эти функции являются–называются полем единичных нормалей поверхностей S.

Определение. Всякое непрерывное поле единичных нормалей гладкой поверхности называется *ориентацией*. Поверхность называется *двусторонней*, если она имеет две различных ориентации $\pm\vec{n}$. Ориентация $\vec{n}$ называется положительной.

Поверхность с выбранной ориентацией называется *ориентированной поверхностью*.

При замене параметризации ориентация сохраняется, если знак якобиана $+$.

Геометрический смысл знака якобиана. Я не буду на этом подробно останавливаться. Пусть есть плоская область и она взаимно однозначно гладко отображается на другую область, пусть якобиан не вырожден. Тогда он везде имеет фиксированный знак.

Если это “+”, то ориентация сохраняется, если он “−” — меняется на противоположную. Я не буду особенно подробно рассуждать, как выбирается ориентация в разных пространствах. Немножко прокомментирую двумерный случай. Здесь возможны 2 подхода.

1. Берем гладкий ориентированный контур. Если +, то ориентация образа контура такая же, если −, то другая.

2. Есть две гладких ориентированных кривых, пересекающихся трансверсально. Образы этих кривых — тоже 2 ориентированных кривых, пересекающихся трансверсально. Берем меньший угол от 1й кривой ко второй, с учетом направления на кривых. Он либо из промежутка $(0, \pi)$, или из промежутка $(-\pi, 0)$ (значения 0 и π не возможны в силу трансверсальности). Если +, то знак угла сохранится, если −, то поменяется.

Первая квадратичная форма. Пусть

$$S = \{\vec{r}(u, v),\ (u, v) \in \bar{D}\}$$

— гладкая параметрически заданная поверхность, то есть по определению $\vec{r}_u', \vec{r}_v'$ непрерывны на замкнутой области $\bar{D}$ и $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq \vec{0}$ на $\bar{D}$.

Рассмотрим дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$. Тогда

$$|d\vec{r}\,|^2 = |\vec{r}_u'|^2 du^2 + 2(\vec{r}_u', \vec{r}_v') du dv + |\vec{r}_v'|^2 dv^2.$$

Положим $E = |\vec{r}_u'|^2$, $F = (\vec{r}_u', \vec{r}_v')$, $G = |\vec{r}_v'|^2$, тогда $|d\vec{r}\,|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

Квадратичная форма $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ называется первой квадратичной формой поверхности, E, F, G — её коэффициенты.

Первая квадратичная форма всегда положительно определена, следовательно, $EG - F^2 > 0$, $E, G > 0$. Справедливо равенство

$$EG - F^2 = \left|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\right|^2$$

Неявно заданные гладкие поверхности

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — область и пусть $F : G \to \mathbb{R}$ — C^1-функция, причем $(F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2 > 0$ на G. Тогда множество точек

$$S = \{(x, y, z) \in G :\ F(x, y, z) = 0\}$$

будем называть *неявно заданной гладкой поверхностью.*

Пример: сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0$.

Локально неявно заданная гладкая поверхность всегда явно заданная гладкая поверхность — в силу теоремы о неявной функции.

Если, например, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) уравнение $F(x, y, z) = 0$ эквивалентно уравнению $z =$

$f(x,y)$. Здесь $f \in C^1$,

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

В качестве нормали удобно брать вектор

$$\operatorname{grad} F := F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

а уравнение нормальной прямой —

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Если рассматривать поверхность уровня функции F, то есть поверхность, определяемую уравнением $F(x,y,z) = 0$, то из вышеизложенного следует, что $\operatorname{grad} F$ ортогонален поверхности уровня.

Кусочно гладкие поверхности.

Два куска поверхностей S_1 и S_2 назовём *соседними*, если пересечение их краев является объединением конечного числа кусочно гладких кривых и, быть может, конечного числа точек.

Определение. Объединение $S = \bigcup S_k$ кусков поверхностей S_k, называется *кусочно гладкой поверхностью*, если

1. для любых двух кусков поверхностей S_i и S_j существует последовательность кусков поверхностей $S_i = S_{k_1}, \dots, S_{k_n} = S_j$, причем куски S_{k_m} и $S_{k_{m+1}}$ — соседние;

2. если пересечение краев двух кусков содержит бесконечное множество точек, то эти куски являются соседними;

3. пересечение краев трех любых различных кусков поверхностей состоит не более чем из конечного множества точек.

Для каждого куска определим часть края, являющуюся также краем другого куска — это внутренняя часть края этого куска. Для каждого куска определим часть края, не являющуюся частью края никакого другого куска — это внешняя часть края этого куска.

Объединение внешних частей краёв всех кусков — граница кусочно гладкой поверхности.

Ориентация на поверхности (выбор нормали) и на её крае (направление на кривой) предполагается согласованы по правилу буравчика. Предположим, что мы движемся по ∂S в направлении его ориентации и единичная нормаль направлена снизу вверх, от ног к голове. Если ближайшая часть S остается слева по ходу движения, то тогда 2 ориентации — на кривой и на поверхности считаются согласованными.

Основная лемма об ориентации. Пусть S — гладкий кусок поверхности, контур ∂D ориентирован положительно, ориентация края ∂S индуцирована ориентацией контура ∂D. Тогда ориентация

$$\nu = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

куска S согласована с ориентацией его края ∂S.

Бесов §21.7 — длинная конструкция

Пусть есть кусочно гладкая поверхность, пусть есть два соседних куска поверхности, каждый из которых ориентирован. Эти две ориентации называем согласованными, если на общей границе они порождают противоположные ориентации.

Определение. Кусочно гладкая поверхность называется ориентируемой, если существуют такие ориентации всех кусков поверхности, что ориентации всех смежных кусков согласованы.

Лекция 5 (30 мая 2013)

На прошлой лекции я говорил о потенциальных векторных полях, о том как связаны различные свойства полей: существование потенциала, безвихревость, независимость интеграла от пути. Ещё я подготовительно сообщил какие-то простые необходимые сведения о двумерных поверхностях в $\mathbb{R}^3$.

Как я говорил, все эти вещи мегаважны в уравнениях Максвелла, также во всяческой гидродинамике и аэродинамике. Без них невозможно будет слушать доклады по всяческим таким наукам.

Теперь мы переходим к интегралам по поверхностям.

Здесь есть та же ситуация, что была с криволинейными интегралами. Для физических приложений важны 2 типа интегралов по поверхностям.

8. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть задана гладкая поверхность $S = \{\vec{r}(u,v) : ((u,v) \in \bar{D}\}$, где D — плоская измеримая область (например, с кусочно гладкой или гладкой границей); $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq 0$ на D.

Интеграл
$$\iint_S F(x,y,z)\,dS := \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,dudv$$
называется поверхностным интегралом первого рода.

Типичное приложение: масса твердого листа с переменной плотностью F.

Свойства.

1. Интеграл существует, если поверхность C^1 и если F непрерывная — это основной случай.

2. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от параметризации.

Пусть поверхность S имеет другое представление $S = \{\vec{r_1}(u_1,v_1) : ((u_1,v_1) \in \bar{D}_1\}$, где $\bar{D}_1$ — также плоская измеримая область и

$$\vec{r_1}(u_1,v_1) = \vec{r}(u(u_1,v_1),v(u_1,v_1)) = (\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1),\chi(u_1,v_1)),$$

и

$$u = u(u_1,v_1),\ v = v(u_1,v_1) \text{ — допустимая замена параметров на } S.$$

Тогда с помощью формул, возникающих при замене параметризации и теореме о замене переменных в двойном интеграле получаем, что

$$\iint_{D_1} F(\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1),\chi(u_1,v_1))|\vec{r}_{u_1}' \times \vec{r}_{v_1}'|\,du_1dv_1 =$$

$$= \iint_{D_1} F(\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1),\chi(u_1,v_1))|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\right|du_1dv_1 =$$

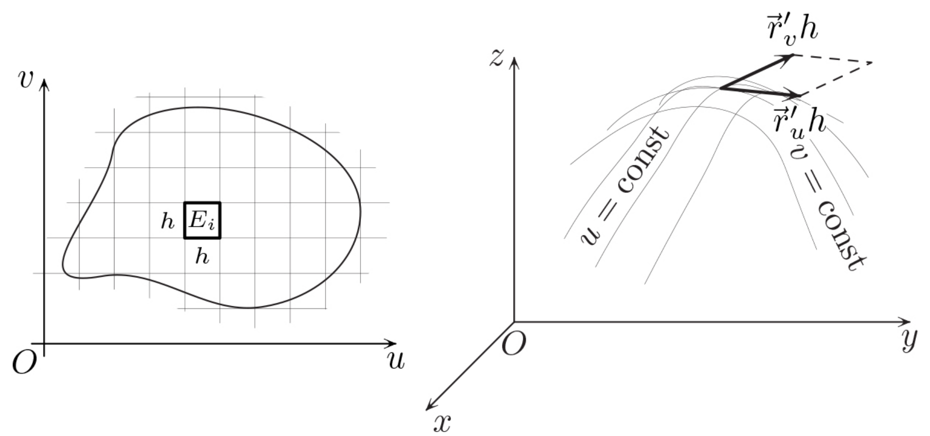
$$= \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,dudv.$$

Площадь поверхности — по определению — это величина

$$\mu(S) = \iint_S dS = \iint_D |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, dudv,$$

в силу свойств 1 и 2 площадь не зависит от параметризации.

Комментарии. Что получается за геометрическая картинка.



Рассмотрим разбиение плоскости (u, v) на квадратики со стороной h. Перенумеруем непустые пересечения с областью E_k, пусть квадратиков m штук. Каждый квадратик имеет вид

$$E_k = \{(u, v) : u_k \leqslant u \leqslant u_k + h,\ v_k \leqslant v \leqslant v_k + h\}.$$

При переходе от вершины (u_k, v_k) квадрата E_k к соседним вершинам радиус вектор $\vec{r}(u, v)$ получит приращения

$$\vec{r}(u_k + h, v_k) - \vec{r}(u_k, v_k) = \vec{r}\,'_u(u_k, v_k)h + \vec{o}(h),$$

$$\vec{r}(u_k, v_k + h) - \vec{r}(u_k, v_k) = \vec{r}\,'_v(u_k, v_k)h + \vec{o}(h).$$

заменим образ квадрата E_k “близким” параллелограммом, лежащим в касательной плоскости к поверхности S в точке $\vec{r}(u_k, v_k)$ и построенной на векторах $\vec{r}\,'_u(u_k, v_k)h, \vec{r}\,'_v(u_k, v_k)h$ и имеющим площадь $S_k = |\vec{r}\,'_u(u_k, v_k) \times \vec{r}\,'_v(u_k, v_k)h^2$.

Если теперь написать сумму Римана $\sum_k S_k$, то она будет стремиться к $\mu(S)$.

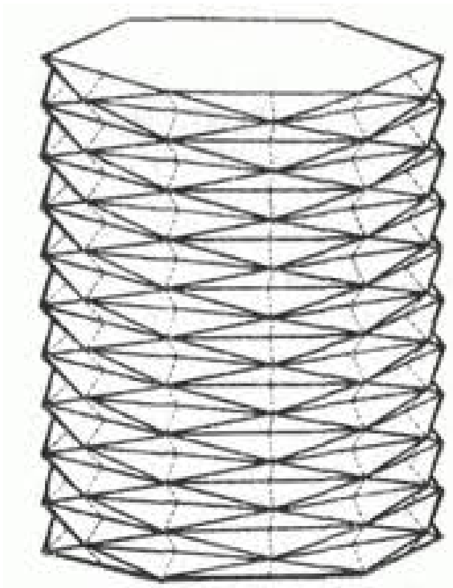
Конечно, здесь еще надо аккуратно проговорить, что при $h \to 0$ вклад в сумму Римана кусочков тех квадратиков, что задевают границу D будет стремиться к нулю, но вроде это очевидно.

Выражение $|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, dudv$ называют элементом площади и обозначают dS. Учитывая формулы, что я писал на предыдущей лекции, получаем разные формы записи:

$$dS = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, dudv = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

здесь E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы.

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности определяется как сумма по кускам. Площадь поверхности определяется как сумма площадей поверхностей кусков.



Например, ввести понятие гладкой поверхности, триангулировать её, посчитать площадь треугольников и увидеть как-то, что объем гладкой поверхности равен нулю. Тут есть подводные камни.
Это сапог Шварца.
Разбиваем высоту цилиндра на n слоёв, окружности — на m слоёв. Вроде, очевидно, что треугольники получаются малого периметра. А если посчитать суммарную площадь всей “гармошки”, то получится, что она зависит от предела nm^{-2}.

9. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана гладкая поверхность $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \bar{D}\}$, где D — плоская измеримая область (например, с кусочно гладкой или гладкой границей). По определению, $\vec{r}_u', \vec{r}_v' \in C, \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq 0$ на D. Положим

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|} = (\cos\alpha, \cos\beta \cos\gamma).$$

Поверхность S ориентируем выбором непрерывного поля единичных нормалей $\vec{\nu} = \pm\vec{n}$ и обозначим полученную ориентированную поверхность через $S^{\vec{\nu}}$.

Случай $\vec{\nu} = \vec{n}$ называем положительной ориентацией, случай $\vec{\nu} = -\vec{n}$ называем отрицательной ориентацией. Используем обозначение $S^{\pm}$ для ориентации $\pm$.

Пусть на поверхности задано векторное поле

$$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Определение. Потоком поля $\vec{A}$ через поверхность $S^{\vec{\nu}}$ (ещё говорят поток через поверхность S в направлении нормали ν) называется поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{\nu}) dS.$$

При замене ориентации поток меняет знак.

Определение. Потоком называют также поверхностным интегралом 2-го рода от векторного поля $\vec{A}$ по ориентированной поверхности $S^{\vec{\nu}}$.

Можно говорить, что задана 2-форма $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ и

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy := \iint_S (\vec{A}, \vec{\nu}) dS$$

Из определения поверхностного интеграла следует

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_D \left(P(\ldots)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(\ldots)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(\ldots)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv.$$

Как и для криволинейных интегралов, поверхностный интеграл по кусочно гладким поверхностям определяется как сумма интегралов по отдельным гладким частям.

Еще раз вернёмся ко всяким определениям.

В излагаемой теории принято говорить, что бывают не только векторные поля — это мы знаем, что такое, но и скалярные поля. Напоминаю: оператор Гамильтона, он же набла. Градиент скалярного поля — это векторное поле $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Пусть задано векторное поле $\vec{A} : G \to \mathbb{R}^3$. Производная по направлению $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{e}} := \frac{d}{dt}\vec{A}(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0},$$

если производная обычной функции в правой части существует. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\cos\gamma = (\vec{e}, \nabla)\vec{A}.$$

Если $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный фиксированный вектор, то вектор

$$(\vec{b}, \nabla)\vec{A} := \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}b_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}b_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}b_z$$

называется градиентом вектора $\vec{A}$ по вектору $\vec{b}$. Число

$$\operatorname{div}\vec{A} := \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

называется дивергенцией поля $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$.

Пример простого вычисления:

$$\operatorname{rot}(f\vec{A}) = \nabla \times (f\vec{A}) = \nabla f \times \vec{A} + f(\nabla \times \vec{A}) = \operatorname{grad} f \times \vec{A} + f \operatorname{rot}\vec{A}.$$

10. Формула Гаусса-Остроградского

Пусть на замыкании $\bar{G}$ области G задано C^1 гладкое векторное поле $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Определение. *Явный почти гладкий кусок поверхности*:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\},$$

где D — ограниченная плоская область, ∂D — кусочно гладкий контур, f непрерывна на $\bar{D}$ и C^1 на D.

Потоком непрерывного поля $\vec{A} = R(x, y, z)\vec{k}$ через явный почти гладкий кусок поверхности S в направлении нормали $-f'_x\vec{i} - f'_y\vec{j} + \vec{k}$ называется интеграл

$$\iint_D R(x, y, f(x, y))\, dxdy.$$

Аналогично определим потоки для полей $P\vec{i}$ и $Q\vec{j}$ для явный почти гладких кусков поверхностей $x = g(y, z)$ и $y = h(z, x)$.

Область в $\mathbb{R}^3$ вида

$$G = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in D\}$$

назовем простой относительно оси Oz. Здесь D — ограниченная плоская область, ∂D — кусочно гладкий контур, функции φ и ψ непрерывны на $\bar{D}$ и непрерывно дифференцируемы на D.

Аналогично определим области, простые относительно других осей.

Граница простой относительно оси Oz области G состоит из 3х частей: нижней S_1, верхней S_2 и боковой S_3.

Будем называть область G допустимой, если её можно представить разбить в виде объединения конечного числа областей, простых относительно оси Oz, отдельно — в виде объединения конечного числа областей, простых относительно оси Oy и в виде объединения конечного числа областей, простых относительно оси Ox.

Когда-то при доказательстве формулы Грина мы доказывали, что ФГ справедлива для областей, простых относительно каждой из 2х осей, а потом доказывали, что область с кусочно гладкой границей всегда можно разрезать на простые области.

Здесь мы не доказываем, что каждая область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью, является допустимой. Это можно доказать, я это делать не буду.

Теорема Гаусса-Остроградского. Пусть область G допустима, векторное поле непрерывна, нормаль внешняя. Тогда

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz = \iint_{\partial G} (\vec{A}, \vec{n})\, dS.$$

Доказательство состоит из 3х шагов: <u>Шаг 1.</u> Доказательство достаточно провести для случая поля $\vec{A} = (0, 0, R\vec{k})$, для остальных компонент — аналогично.

<u>Шаг 2.</u> Доказательство достаточно провести для одной простой относительно оси Oz области. Потом сложим, интегралы по внутренним кускам поверхностей разреза сократятся.

<u>Шаг 3.</u> Пусть G имеет вид

$$G = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Для такой области

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdy \right) dxdy =$$
$$= \iint_D R(x,y,\psi(x,y))\, dxdy - \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\, dxdy =$$
$$= \iint_{S_2^+} R\, dxdy - \iint_{S_1^-} R\, dxdy = \iint_{S_2^+} R\, dxdy + \iint_{S_1^+} R\, dxdy + \iint_{S_0} R\, dxdy = \iint_S R\, dxdy.$$

Следствие. Пусть векторное поле $\vec{A}$ непрерывно вместе с компонентами дивергенции P'_x, Q'_y, R'_z в некоторой окрестности точки M. Пусть B_ε — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M, ∂B_ε — его граница (сфера), ориентированная внешней нормалью.

В силу доказанной формулы Гаусса–Остроградского

$$\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz = \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{A}, \vec{n})\, dS,$$

в силу теоремы о среднем в некоторой точке $M_\varepsilon \in B_\varepsilon$

$$\operatorname{div} \vec{A}(M_\varepsilon) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon)} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{A}, \vec{n})\, dS.$$

Теперь

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu(B_\varepsilon)} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{A}, \vec{n})\, dS.$$

Эта формула определяет дивергенцию без выбора прямоугольной системы координат, это называется геометрическое определение дивергенции.

Определение. Векторное поле $\vec{A}$ называется *соленоидальным* в D, если $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ в D.

В силу теоремы Гаусса-Остроградского: соленоидальность поля эквивалентна равенству нулю потока в направлении нормали через границу любой допустимой области.

Определение. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется объемно односвязной, если из принадлежности G границы подобласти ($\partial D \subset G$) следует принадлежность G самой подобласти ($D \subset G$).

Односвязность означает, что образ любой сферы стягиваемый в G. Напомнить про дырки двух типов в $\mathbb{R}^3$: сквозные — где есть несвязные контура (тор), полости, где несвязны поверхности без края (шаровой слой).

11. Формула Стокса

Пусть поверхность

$$S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \bar{D}\} \subset G \subset \mathbb{R}^3$$

($\vec{r} \in C^2$, G — область в $\mathbb{R}^3$, D — плоская ограниченная область с границей $\partial D = \{(u(t), v(t)) : t \in [a,b]\}$, представляющая собой простой кусочно гладкий контур) имеет край $\partial S = \Gamma = \vec{r}(u(t), v(t) :$

$t \in [a, b]$). При этом говорят, что контур ∂S ограничивает поверхность S, ещё говорят, что поверхность S натянута на контур ∂S.

Будем считать, что контур $\partial D \in \mathbb{R}^2$ ориентирован положительно. Пусть

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

— ориентация поверхности S, при этом ориентации на S и на ∂S оказываются согласованными (по правилу штопора).

Теорема Стокса. Пусть на G задано C^1 векторное поле $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и поверхность $S \subset G$. Тогда, если ориентации согласованы, то

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n})\, dS = \int_{\partial S} (\vec{A}, d\vec{r}).$$

Словесный перефраз формулы Стокса: поток вихря через поверхность равен циркуляции по контуру, ограничивающему эту поверхность.

В координатной форме формула Стокса имеет вид

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS = \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz.$$

Доказательство. Как обычно, рассмотрим лишь случай поля $\vec{A} = P\vec{i}$:

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P(x, y, z)[x'_u u'_t + x'_v v'_t]\, dt = \int_{\partial D} P(x, y, z)[x'_u du + x'_v dv].$$

Применим к последнему интегралу формулу Грина:

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dudv =$$
$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] dudv = \iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right] dS. \qquad \text{чтд.}$$

Замечание 1. Формула Стокса справедлива и для более общей ситуации, требование непрерывности вторых производных можно снять.

Замечание 2. Формула Стокса справедлива и для более общей ситуации, можно рассматривать поток через ориентированную кусочно гладкую поверхность.

Замечание 3. Формула Стокса может быть использована для геометрического (бескоординатного) определения $\operatorname{rot}\vec{A}$.

Пусть $\vec{A}$ — C^1 в окрестности точки $M = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{\nu}$ — единичный вектор, D_ε — круг радиуса $\varepsilon > 0$ в плоскости, ортогональной $\vec{nu}$. Тогда по формуле Стокса и теореме о среднем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} (\operatorname{rot}\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_{D_\varepsilon} (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{\nu})\, dS = (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{\nu})\Big|_{(x,y,z)=(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)} \mu(D_\varepsilon),$$

где ориентация окружности D_ε согласована с $\vec{\nu}$ по правилу штопора, $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in D_\varepsilon$. Поэтому

$$(\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{\nu})\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu(D_\varepsilon)} \int_{\partial D_\varepsilon} (\operatorname{rot} \vec{A}, d\vec{r}).$$

Поскольку криволинейный интеграл второго рода не зависит от сдвига и поворота декартовой системы координат, то и $(\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{\nu})$ не зависит.

Литература.

1. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу, Москва, 2010, 559 стр. (Лекции студентам физтеха, есть в сети)

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, том 2 из 3. Наука, 1981, 584 стр.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Издание 2. Глава 2, §4