

Группы и алгебры Ли
Листок 14
Форма Киллинга

1. Вычислите форму Киллинга для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Докажите, что $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ проста.
2. Вычислите форму Киллинга для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ и докажите, что $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ проста.
3. Докажите, что вещественная алгебра Ли с положительно определённой формой Киллинга равна нулю.
4. Докажите, что билинейная форма $\text{tr}(xy)$ на алгебре Ли \mathfrak{sp}_{2n} невырождена.
5. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_n$. Вычислите форму Киллинга и проверьте, что она отрицательно определена. Является ли \mathfrak{g} простой? полупростой? Те же вопросы про $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_n$.
6. Найдите коммутанты алгебр Ли \mathfrak{gl}_n и \mathfrak{sl}_n .