

I курс. Задание по дискретной математике №3.

Дата выдачи: 30 мая 2013.

Срок сдачи: строго 12.00 четверг 13 июня 2013

1. Для простого (т.е., неориентированного, без кратных ребер и петель) графа G на n вершинах обозначим через \overline{G} граф с тем же множеством вершин $V(G)$, в котором ребро $v_i v_j$ присутствует тогда и только тогда, когда его нет в G (\overline{G} — граф, дополнительный к G в полном графе на n вершинах).

а) Покажите, что для характеристического многочлена $\chi(\overline{G}, \lambda)$ матрицы смежности $A(\overline{G})$ имеет место равенство

$$\chi(\overline{G}, \lambda) = (-1)^n \det((-\lambda - 1)E - A(G) + J),$$

где J — матрица, состоящая из единиц на всех местах, а E — единичная матрица.

б) Докажите, что, если граф G является k -регулярным (степень каждой вершины равна k), то у графов G и \overline{G} одинаковый набор собственных векторов. Как связаны собственные значения G и \overline{G} , отвечающие этим векторам?

в) Простой граф G на $2n$ вершинах построим следующим образом. Нарисуем на плоскости выпуклый $2n$ -угольник ($n \geq 2$) и занумеруем его стороны последовательными натуральными числами от 1 до $2n$. Проведем в нарисованном многоугольнике все возможные диагонали. Точки пересечения диагоналей вершинами не являются. Затем удалим из полученного графа n сторон исходного многоугольника с нечетными номерами (удалим стороны через одну). Найдите собственные значения графа G .

2. Паросочетание размера k в графе — это любой набор из k ребер графа без общих концов. Пусть $\mu_k(G)$ — число паросочетаний размера k в G .

а) Покажите, что коэффициент при λ^{n-2k} в характеристическом многочлене матрицы смежности дерева G равен $(-1)^k \mu_k(G)$.

б) Приведите пример неизоморфных деревьев с одинаковым характеристическим многочленом, равным $\lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4$.

3. Рассмотрим язык \mathcal{L} с алфавитом $\{a, b\}$, слова которого содержат четное число букв a и кратное трем число букв b .

а) Опишите классы \mathcal{L} -неразличимых слов и докажите, что язык \mathcal{L} является регулярным.

б) Постройте конечный автомат с минимально возможным числом состояний, распознающий язык \mathcal{L} .

в) Напишите контекстно-свободную грамматику с однозначным выводом для языка \mathcal{L} .

г) Найдите производящую функцию языка \mathcal{L} .

4. Рассмотрим язык \mathcal{L} с алфавитом алфавите $\{a, b\}$, состоящий из слов вида $a^i b a^j$, где $i \geq j \geq 0$.

а) Докажите, что язык \mathcal{L} не является регулярным.

б) Постройте конечный автомат со стеком, распознающий язык \mathcal{L} .

в) Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка \mathcal{L} .

г) Найдите производящую функцию языка \mathcal{L} .

5. Покажите, что язык, состоящий из слов вида $a^i b a^{2i} b a^{3i}$, не задается контекстно-свободной грамматикой.
6. (*) Покажите, что язык, состоящий из слов вида $a^i b^j c^k$, где $i = j$ или $i = k$, нельзя задать грамматикой с однозначным выводом.
7. В симметрической группе S_4 :
- а) Вычислите простое число Гурвица $h_{4;3^1 1}^\circ$.
 - б) Вычислите связанное число Гурвица $h_{4;3^1 1}$.
 - в) Вычислите производящую функцию для простых чисел Гурвица $h_{n;2^1 3^1}^\circ$ (воспользуйтесь матрицей смежности).
 - г) Вычислите производящую функцию для связанных чисел Гурвица $h_{n;1^2 2^1}$.