Грассманова алгебра

14.1. Докажите, что: **а)** $\operatorname{tr} S^2\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathscr{A})^2 + \operatorname{tr}(\mathscr{A})^2\right]$; **б)** $\operatorname{tr}\Lambda^2\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathscr{A})^2 - \operatorname{tr}(\mathscr{A})^2\right]$.

14.2. Пусть в трехмерном пространстве V выбран базис. Проверьте, что при естественном отождествлении $\Lambda^2 V$ с V внешнее произведение $\wedge\colon V \times V \to \Lambda^2 V$ превращается в обычное векторное произведение.

14.3. Найдите квадратичное соотношение, которому удовлетворяют 2×2-миноры любой матрицы 2×4 ("соотношение Плюккера").

14.4. **а)** Докажите, что $A \cdot \widehat{A} = \det A \cdot E$, где $\widehat{A}$ — присоединённая матрица для A.

Указание. Как выглядит матрица действия A на $\Lambda^{n-1}V$?

б) Докажите, что матрица с элементами из произвольного кольца обратима тогда и только тогда, когда ее определитель обратим.

14.5. Докажите, что для всякого бивектора $\omega \in \Lambda^2 V$ существует такой базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V и число $k \leq (\dim V)/2$, что $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2k-1} \wedge e_{2k}$.

Эпиморфизм $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$

Обозначения. Через SU_2 обозначим группу унитарных матриц 2×2 с определителем 1. Напомним, что SO_3 — это группа (вещественных) ортогональных матриц 3×3.

14.6. Докажите, что всякая матрица из SU_2 имеет вид $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, где $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

14.7. Докажите, что всякий элемент из группы SO_3 есть вращение ℓ_φ вокруг некоторой оси ℓ на некоторый угол φ.

14.8 (Теорема Эйлера). Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный репер $Oxyz$. Докажите, что любое вращение ℓ_φ есть композиция $Z_\gamma X_\beta Z_\alpha$ вращений вокруг Oz, Ox, Oz на углы α, β, γ соответственно.

14.9. Покажите, что эрмитовы матрицы со следом нуль образуют трёхмерное векторное пространство V над $\mathbb{R}$, форма $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$ задаёт на нём структуру евклидова пространства, а матрицы Паули $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ образуют в V ортогональный базис.

14.10. Для любого элемента $u \in U_2$ определено отображение $R_u\colon V \to V$, $R_u(X) = uXu^{-1}$. Покажите, что R_u — ортогональный оператор, а соответствите $u \to R_u$ задаёт гомоморфизм $R\colon U_2 \to O_3$.

14.11. Пусть $u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$, $v_\psi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $R_{u_{\varphi/2}} = X_\varphi$, $R_{v_{\psi/2}} = Z_\psi$. Выведите отсюда, что при гомоморфизме R каждый элемент из SO_3 имеет прообраз из SU_2.

14.12. Покажите, что при гомоморфизме R группа SU_2 отображается в точности на SO_3, и опишите ядро этого гомоморфизма.

Правила игры. Оценка 10 ставится за сдачу 80% задач без звёздочек. Все сданные задачи должны быть занесены в кондуит до 23:59 14 июня 2013 г.