

**Группы и алгебры Ли**  
**Листок 15**  
**Разложение Картана**

1. Докажите теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта для двумерной неабелевой алгебры Ли.
2. Докажите, что алгебра Ли строго верхнетреугольных матриц нильпотентна, а алгебра Ли нестрого верхнетреугольных матриц разрешима.
3. Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{h}$  – подалгебра диагональных матриц. Докажите, что централизатор  $\mathfrak{h}$  совпадает с  $\mathfrak{h}$ . Найдите все матрицы  $x \in \mathfrak{g}$ , такие что  $[h, x]$  пропорционально  $x$  для всех  $h \in \mathfrak{h}$ . Для каждого такого  $x$  найдите коэффициенты пропорциональности.
4. Пусть  $A$  – линейный оператор на конечномерном комплексном векторном пространстве. Докажите, что  $A$  может быть единственным образом разложен в сумму  $A = A_s + A_n$ , где  $A_s$  – диагонализуемый оператор,  $A_n$  – нильпотентный оператор и  $A_s A_n = A_n A_s$ .
5. Рассмотрим подалгебру Ли  $\mathfrak{h}$  в  $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$ , образованную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Докажите, что  $\mathfrak{h}$  абелева и совпадает со своим централизатором. Найдите все собственные векторы  $\mathfrak{h}$  в  $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$  (относительно присоединённого действия) и вычислите соответствующие собственные значения.

- 6\*. Постройте два неизоморфных неприводимых представления алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  размерности  $2^{n-1}$ .