Вокруг спектральной теоремы

Ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *нормальным*, если $TT^* = T^*T$. Обозначим через $\mathscr{B}(H)$ алгебру ограниченных линейных операторов в H. Для любого нормального оператора T существует и единственно *непрерывное функциональное исчисление*, т.е. непрерывный гомоморфизм $\gamma\colon C(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(H)$, сохраняющий единицу, обладающий свойством $\gamma(\bar f) = \gamma(f)^*$ и переводящий координату t в оператор T. Для $f \in C(\sigma(T))$ вместо $\gamma(f)$ обычно пишут $f(T)$. Известно, что γ изометричен (т.е. $\|f(T)\| = \sup\{|f(t)| : t \in \sigma(T)\}$) и сохраняет спектр (т.е. $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$).

Обозначим через $B(\sigma(T))$ алгебру ограниченных борелевских функций на $\sigma(T)$. Гомоморфизм γ единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $\tilde\gamma\colon B(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(H)$, обладающего свойством $\tilde\gamma(\bar f) = \tilde\gamma(f)^*$ и такого, что для любой равномерно ограниченной последовательности (f_n) в $B(\sigma(T))$, сходящейся к нулю поточечно, последовательность $\tilde\gamma(f_n)$ сходится к нулю в сильной операторной топологии (т.е. $\tilde\gamma(f_n)x \to 0$ для всех $x \in H$). Гомоморфизм $\tilde\gamma$ называется *борелевским функциональным исчислением.* Вместо $\tilde\gamma(f)$ обычно пишут $f(T)$.

9.1. Для следующих операторов T опишите, как действует оператор $f(T)$, где $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция:
1) ортогональный проектор в гильбертовом пространстве;
2) диагональный оператор M_λ в пространстве ℓ^2 (где $\lambda \in \ell^\infty$);
3) оператор умножения M_φ в пространстве $L^2(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой и $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$);
4) оператор сдвига T_b в $\ell^2(\mathbb{Z})$ (см. листок 6).

9.2. Обобщите задачу 9.1 на случай ограниченной борелевской функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$.

9.3. Пусть T — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве, $f \in C(\sigma(T))$ и $g \in C(\sigma(f(T)))$. Докажите, что $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$.

9.4. Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и $f \in C(\sigma(T))$. Докажите, что оператор $f(T)$ компактен тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$.

Элемент $x \in H$ называется *циклическим вектором* оператора T, если линейная оболочка множества $\{T^n x : n \geqslant 0\}$ плотна в H. Оператор T называется *циклическим*, если в H существует вектор, циклический для T. Для любого ограниченного самосопряженного циклического оператора в H существует положительная борелевская мера μ на $\sigma(T)$, такая, что T унитарно эквивалентен оператору умножения M_t, действующему в пространстве $L^2(\sigma(T),\mu)$ по формуле $(M_t f)(t) = tf(t)$.

9.5. Докажите, что компактный самосопряженный оператор является циклическим **1)** тогда и **2)** только тогда, когда все его собственные значения однократны.

9.6. Докажите, что оператор умножения $M_\varphi\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ на действительную функцию $\varphi \in C[a,b]$ является циклическим, если φ строго монотонна[1].

9.7. Оператор T действует в $L^2[0,1]$ по формуле $(Tf)(t) = \sqrt{t} f(t)$. Найдите в явном виде меру μ и унитарный изоморфизм $U\colon L^2[0,1] \to L^2([0,1],\mu)$, осуществляющий эквивалентность между T и M_t.

Для каждого ограниченного нормального оператора T в сепарабельном гильбертовом пространстве существуют пространство с конечной мерой (X,μ) и функция $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$, такие, что T унитарно эквивалентен оператору умножения M_φ в пространстве $L^2(X,\mu)$ (*спектральная теорема* в терминах оператора умножения).

9.8. **1)** С помощью спектральной теоремы докажите, что ограниченный самосопряженный оператор P, удовлетворяющий условию $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$, является проектором.
2) Докажите то же самое, не используя спектральную теорему.

[1] Обратное утверждение неверно. Контрпример был построен на семинаре 28 мая.

9.9. 1) С помощью спектральной теоремы докажите, что ограниченный нормальный оператор с действительным спектром самосопряжен.
2) Докажите то же самое, не используя спектральную теорему.

9.10. 1) С помощью спектральной теоремы докажите, что ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве положителен (см. листок 7) тогда и только тогда, когда он самосопряжен и $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.
2) Докажите то же самое, не используя спектральную теорему.
3) Достаточно ли для положительности T условия $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$?
Указание к п. 2. Для доказательства включения $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$ достаточно показать, что $T + \lambda\mathbf{1}$ топологически инъективен при $\lambda > 0$.

Пусть $\mathrm{PR}(H)$ — множество всех ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве H, $X \subset \mathbb{C}$ — компактное множество, $\mathscr{B}or(X)$ — его борелевская σ-алгебра. *Проекторнозначной мерой* на X называется функция $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$, обладающая свойствами $E(X) = \mathbf{1}_H$, $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ и σ-аддитивная в сильной операторной топологии. Если E — такая мера и $x, y \in H$, то формула $E_{x,y}(B) = (E(B)x, y)$ определяет σ-аддитивную борелевскую комплексную меру на X (положительную при $y = x$). Для каждой функции $f \in B(X)$ существует единственный ограниченный оператор $I(f)$ в H, такой, что $(I(f)x, y) = \int_X f\, dE_{x,y}$ для всех $x, y \in H$. Он называется *интегралом* f по E и обозначается $\int_X f\, dE$.

Если T — ограниченный нормальный оператор в H, то формула $E(B) = \chi_B(T)$ (где χ_B — характеристическая функция множества B) определяет проекторнозначную меру на $\sigma(T)$, называемую *спектральной мерой* оператора T. При этом для любой $f \in B(\sigma(T))$ выполнено $f(T) = \int_{\sigma(T)} f\, dE$. В частности, $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE(\lambda)$. Указанное соответствие между проекторнозначными мерами на компакте X и нормальными операторами в H со спектром в X взаимно однозначно (*спектральная теорема* в терминах проекторнозначных мер).

9.11. Опишите проекторнозначные спектральные меры операторов из задачи 9.1 (1–3).

9.12. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть E — его спектральная мера. Докажите, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ образ проектора $E(\{\lambda\})$ равен собственному подпространству $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. В частности, $\lambda \in \sigma_p(T) \iff E(\{\lambda\}) \neq 0$.

9.13. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть E — его спектральная мера. Докажите, что T компактен тогда и только тогда, когда $E(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ для некоторого не более чем счетного компакта $K \subset \mathbb{R}$, каждая ненулевая точка λ которого изолирована в K и такова, что проектор $E(\{\lambda\})$ имеет конечномерный образ.

9.14. 1) Докажите, что если T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, то оператор $\exp(iT)$ унитарен.
2) Докажите, что любой унитарный оператор U в H представим в виде $U = \exp(iT)$, где T — самосопряженный оператор в H.
3) Докажите, что группа $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов в H линейно связна.
4) Докажите, что группа $\mathrm{GL}(H)$ обратимых ограниченных операторов в H линейно связна[2].
Указание: в. п. 2 можно использовать функциональное исчисление или спектральную теорему, а в п. 4 — полярное разложение.

9.15*. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Докажите, что множество компактных операторов $\mathscr{K}(H)$ — это единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$.

Указание. Пусть $I \subseteq \mathscr{B}(H)$ — замкнутый двусторонний идеал. Имитируя известное доказательство простоты алгебры матриц, докажите, что I содержит все одномерные операторы (а значит, содержит и $\mathscr{K}(H)$). Если I содержит хотя бы один некомпактный оператор, то воспользуйтесь спектральной теоремой.

---

[2] На самом деле, если H бесконечномерно, то группы $\mathrm{U}(H)$ и $\mathrm{GL}(H)$ стягиваемы, т.е. гомотопически эквивалентны точке (теорема Кюйпера). См. добавление к книге М. Атья «Лекции по K-теории», М.: Мир, 1967.