Квазиконформные отображения, комплексная динамика и пространства модулей

Алексей Глуцюк

Весенний семестр 2013/2014

Теорема Пуанкаре–Кёбе об униформизации – фундаментальная теорема геометрии, утверждающая, что всякая односвязная риманова поверхность конформно-эквивалентна либо сфере Римана, либо комплексной прямой $\mathbb{C}$, либо диску. Теория квазиконформных отображений, созданная Г.Грёчем, М.А.Лаврентьевым и Ч.Морри Мл. в 1920–1930-х гг. и развитая Л.Альфорсом и Л.Берсом, переносит теорему об униформизации на *непостоянные* и даже *разрывные* комплексные структуры. Она имеет много важных применений в комплексной динамике, клейновых группах, теории Тейхмюллера, пространствах модулей, геометрии... Использование квазиконформных отображений в динамике рациональных преобразований сферы Римана, начатое в 1980-х гг., немедленно привело к фундаментальному прорыву: знаменитой теореме Д.Сулливана об отсутствии блуждающих компонент множества Фату. Главный аргумент состоит в том, что в подходящих ситуациях, теория квазиконформных отображений дает возможность строить много различных рациональных функций с заданной динамикой.

Мы обсудим основы теории квазиконформных отображений с доказательством основной теоремы (измеримой теоремы Римана) и приложения в рациональной динамике и клейновых группах (конечно-порожденных дискретных группах конформных преобразований сферы Римана), включая вышеупомянутую теорему Сулливана, структурную устойчивость, а также аналогичную теорему Альфорса о конечности в теории клейновых групп. Затем мы обсудим теорию Тейхмюллера, изучающую пространство различных комплексных структур на отмеченной замкнутой поверхности.

Настоящий курс будет, с одной стороны, продолжением курса Владлена Тиморина (осень 2013 г.). С другой стороны, он будет независимым и понятным тем, кто не слушал курса Тиморина.

Примерная программа курса

1. Квазиконформные отображения: введение и основная теорема.
2. Доказательство в гладком случае на торе.
3. Неравенство Грёча и доказательство в общем случае.
4. Приложение: теорема об отсутствии блуждающих компонент.
5. Структурная устойчивость и голоморфные движения.
6. Клейновы группы. Теорема Альфорса о конечности. Гипотеза о мере.
7. Пространства Тейхмюллера.

Требуемые знания: комплексный анализ одной переменной.

Учебные материалы:

Л.Альфорс. Лекции о квазиконформных отображениях.

J.Hubbard. Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics.

C. McMullen. Riemann surfaces, dynamics and geometry. Course notes:
http://www.math.harvard.edu/ ctm/home/text/class/harvard/275/09/html/base/rs/rs.pdf