

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(спецкурс, весенний семестр 2013–2014 уч. года)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Гармонический анализ на группах и теория унитарных представлений — тесно связанные и дополняющие друг друга области математики. Они играют важную роль в анализе, геометрии, топологии, физике и других науках. В сущности, гармонический анализ и теория унитарных представлений выросли из двух классических сюжетов, которые студенты-математики обычно изучают на младших курсах, а именно, из теории тригонометрических рядов Фурье и теории представлений конечных групп (над  $\mathbb{C}$ ). В курсе, помимо прочего, будет объяснено, что общего между этими сюжетами, как устроена теория унитарных представлений компактных групп, что такое двойственность Таннаки–Крейна и при чем здесь преобразование Фурье. Кроме того, будет полностью построен гармонический анализ на локально компактных абелевых группах, включающий в себя двойственность Понтрягина и обобщающий теорию преобразования Фурье на прямой. В качестве вспомогательного материала будут также изложены основы теории банаховых алгебр. В заключение предполагается обсудить (в основном на примерах) некоторые аспекты гармонического анализа и теории унитарных представлений для некомпактных неабелевых групп.

**Пререквизиты.** Теория интеграла Лебега (в объеме вышкинского курса анализа), основы функционального анализа (в объеме вышкинского курса «Функциональный анализ — 1»). Полезно также знакомство с основными фактами теории представлений конечных групп (в объеме вышкинского курса алгебры).

## Краткая программа курса

- 1. ВВЕДЕНИЕ.** Игрушечный пример: гармонический анализ на конечной абелевой группе. Классические примеры: гармонический анализ на группе целых чисел, на окружности и на прямой.
- 2. ОСНОВНЫЕ ОБЪЕКТЫ.** Топологические группы. Мера Хаара. Связь между левой и правой мерами Хаара. Унитарные представления. Общее понятие преобразования Фурье.
- 3. БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ.** Групповая  $L^1$ -алгебра локально компактной группы. Спектр элемента банаховой алгебры. Коммутативные банаховы алгебры: гельфандов спектр, преобразование Гельфанда. Общие сведения о  $C^*$ -алгебрах. Групповая  $C^*$ -алгебра локально компактной группы. Первая теорема Гельфанда–Наймарка.
- 4. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ.** Группа, двойственная к локально компактной абелевой группе. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Гельфанда. Теорема Планшереля. Двойственность Понтрягина. Приложение: формула суммирования Пуассона.
- 5. КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ.** Процедура усреднения. Конечномерность неприводимых представлений. Разложение унитарных представлений на неприводимые. Теорема Петера–Вейля. Соотношения ортогональности. Преобразование Фурье и его обратное. Теорема Планшереля. Двойственность Таннаки–Крейна.
- 6. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ НЕАБЕЛЕВЫ ГРУППЫ.** Группа Гейзенберга и ее неприводимые представления. Теорема Стоуна–фон Нойманна. Связь с орбитами коприсоединенного представления. Преобразование Фурье и теорема Планшереля для группы Гейзенберга. Группа  $SL_2(\mathbb{R})$  (обзор): ее строение, неприводимые представления, теорема Планшереля.