

Локально конформно кэлеровы (LCK) многообразия суть многообразия, универсальное покрытие которых кэлерово, а группа монодромий действует гомотетиями. Это простейший пример некэлерова комплексного многообразия. В последние 10 лет теория LCK-многообразий развивается очень активно. Я изложу основные результаты теории LCK-многообразий в ее современном состоянии.

1. Определение и базовые свойства LCK-многообразий. Весовое расслоение и форма Ли. Теорема Вайсмана о некэлеровости LCK-многообразий: компактное LCK-многообразие с нетривиальным весовым расслоением не допускает кэлеровой структуры.
2. Контактные, сасакиевы и вайсмановы многообразия. Структурная теорема для вайсмановых многообразий. Регулярные, квазирегулярные, иррегулярные вайсмановы и сасакиевы структуры. Теорема об иммерсии вайсмановых многообразий в многообразии Хопфа.
3. Классификация некэлеровых поверхностей и классификация сасакиевых 3-многообразий (Бельгун). Поверхности Инуэ и многообразия Олеклауса-Тома.
4. LCK-многообразия с потенциалом и теорема о вложении LCK-многообразий с потенциалом: каждое LCK-многообразие с потенциалом (в частности, каждое вайсманово) вкладывается в многообразие Хопфа. Явные конструкции вайсмановых и LCK-метрик на многообразиях Хопфа.
5. Строго псевдовыпуклые CR-многообразия и сасакиева геометрия.
6. Когомологии Морса-Новикова и Ботта-Черна для LCK-многообразий. Деформационная устойчивость LCK-многообразий с потенциалом.
7. Группа автоморфизмов вайсманова многообразия. Существование потенциала и существование вайсмановой метрики на LCK-многообразиях с большими группами автоморфизмов.

Студентам понадобится знание основ дифференциальной геометрии: кэлеровы метрики, связности, когомологии, векторные расслоения, кривизна риманова многообразия, почти комплексные и симплектические структуры, локальные системы. Понимания содержания осеннего курса "Дифференциальная геометрия и векторные расслоения" должно быть достаточно.

1. Definition and basic properties of LCK-manifolds. Weight bundle and the Lee form. Vaisman's theorem on non-Kaehlerianity of LCK-manifold: a compact LCK-manifold with non-trivial weight bundle does not admit a Kaehler metric.
2. Contact, Sasakian and Vaisman manifolds. Structure theorem for Vaisman manifolds. Regular, quasiregular, irregular Vaisman and Sasakian structures. Immersion theorem for Vaisman manifolds.
3. Classification of non-Kaehler complex surfaces, and classification of Sasakian 3-manifolds (Belgun). Inoue surfaces and Oeljeklaus-Toma manifolds.
4. LCK-manifolds with potential. Embedding theorem for LCK-manifolds with potential: any LCK manifold with potential (in particular, any Vaisman manifold) can be embedded to a linear Hopf manifold. Explicit constructions of Vaisman and LCK-metrics on Hopf manifolds.
5. Strictly pseudoconvex CR-structures and Sasakian geometry.
6. Morse-Novikov and Bott-Chern cohomology for LCK-manifolds. Deformation stability of LCK-manifolds with potential.
7. Group of automorphisms of Vaisman manifolds. Existence of potential and Vaisman metrics on LCK-manifolds with big automorphism groups.

Literature.

- F. A. Belgun, On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, *Math. Ann.*, 317 (2000), 1--40.
- C.P. Boyer, K. Galicki, *Sasakian geometry*, Oxford mathematical monographs, Oxford Univ. Press, 2006
- S. Dragomir and L. Ornea, *Locally conformal Kähler geometry*, Progress in Math. 155, Birkhauser, Boston, Basel, 1998.
- P. Gauduchon and L. Ornea, Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces, *Ann. Inst. Fourier* 48 (1998), 1107--1127.
- H. Grauert, R. Remmert, *Theory of Stein spaces*, Springer-Verlag 2004.
- K. Oeljeklaus, M. Toma, Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields, *Ann. Inst. Fourier* 55 (2005), 1291--1300.
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Locally conformally Kähler metrics obtained from pseudoconvex shells <http://arxiv.org/abs/1210.2080> 12 pages
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky, Victor Vuletescu Blow-ups of locally conformally Kähler manifolds <http://arxiv.org/abs/1108.4885> 14 pages
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Oeljeklaus-Toma manifolds admitting no complex subvarieties <http://arxiv.org/abs/1009.1101> *Math. Res. Lett.* 18 (2011), no. 04, 747-754
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Locally conformally Kähler manifolds admitting a holomorphic conformal flow <http://arxiv.org/abs/1004.4645> *Mathematische Zeitschrift*, Volume 273, Issue 3 (2013), Page 605-611
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Automorphisms of locally conformally Kähler manifolds <http://arxiv.org/abs/0906.2836> *Int. Math. Res. Not.* 2012, no. 4, 894-903
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Topology of locally conformally Kähler manifolds with potential <http://arxiv.org/abs/0904.3362> *Int. Math. Res. Not.* 2010, No. 4, 717-726 (2010)
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Morse-Novikov cohomology of locally conformally Kähler manifolds <http://arxiv.org/abs/0712.0107> *J. Geom. Phys.* 59 (2009), no. 3, 295--305.
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Embeddings of compact Sasakian manifolds <http://arxiv.org/abs/math/0609617> *Math. Res. Lett.* 14 (2007), no. 4, 703--710
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Sasakian structures on CR-manifolds <http://arxiv.org/abs/math/0606136> *Geom. Dedicata* 125 (2007), 159--173.
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Locally conformally Kähler manifolds with potential <http://arxiv.org/abs/math/0407231> *Mathematische Annalen*, Vol. 248 (1), 2010, pp. 25-33
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Immersion theorem for Vaisman manifolds <http://arxiv.org/abs/math/0306077> *Math. Ann.* 332 (2005), no. 1, 121--143
- Liviu Ornea, Misha Verbitsky Structure theorem for compact Vaisman manifolds <http://arxiv.org/abs/math/0305259> *Math. Res. Lett.* 10(2003), no. 5-6, 799-805
- I. Vaisman, Remarkable operators and commutation formulas on locally conformal Kähler manifolds, *Compositio Math.* 40 (1980), 227--259.
- Misha Verbitsky, Vanishing theorems for locally conformal hyperkähler manifolds <http://arxiv.org/abs/math/0302219> *Proc. of Steklov Institute*, vol. 246, 2004, pp. 54-79