

**1.1.** Пусть  $p, q \in (1, +\infty)$ , и пусть  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

1) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0).$$

2) Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

3) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

**1.2.** Нарисуйте единичный шар на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , снабженной нормой  $\|\cdot\|_p$ , для различных  $p \in [1, +\infty]$ . Обратите внимание на случаи  $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = \infty$ . Что происходит с единичным шаром с ростом  $p$ ?

**1.3.** Пусть  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ .

1) Докажите, что  $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$  на  $\mathbb{K}^n$ .

2) Докажите, что существует такая константа  $C = C_{n,p,q} > 0$ , что  $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$  на пространстве  $\mathbb{K}^n$ .

3) Можно ли эту константу выбрать не зависящей от  $n$ ?

4) Найдите наименьшую константу  $C_{n,p,q}$  с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.

**1.4.** Пусть  $c_{00}$  — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей  $x = (x_n)$ , для каждой из которых существует такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $x_n = 0$  для всех  $n > N$ ). Эквивалентны ли нормы  $\|\cdot\|_p$  и  $\|\cdot\|_q$  на  $c_{00}$  при  $p \neq q$ ?

**1.5.** Докажите, что последовательность  $(x^{(k)})$  в пространстве  $\mathbb{K}^n$  сходится к вектору  $x \in \mathbb{K}^n$  по норме  $\|\cdot\|_p$  (где  $1 \leq p \leq +\infty$ ) тогда и только тогда, когда она сходится к  $x$  по координатам.

**1.6.** Докажите, что  $c_0$  замкнуто в  $\ell^\infty$ . Чему равно замыкание  $\ell^p$  в  $\ell^\infty$ ?

**1.7.** Пусть  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Докажите, что  $\ell^p \subset \ell^q$ , но  $\ell^p \neq \ell^q$  при  $p \neq q$ . Чему равна норма оператора вложения  $\ell^p$  в  $\ell^q$ ?

**1.8.** Докажите, что последовательность  $(f_n)$  в  $\ell^\infty(S)$  сходится к  $f \in \ell^\infty(S)$  по норме  $\|\cdot\|_\infty$  тогда и только тогда, когда она сходится к  $f$  равномерно.

**1.9.** Докажите, что  $C_0(\mathbb{N}) = c_0$ .

**1.10.** Пусть  $X$  — полунормированное пространство, и пусть  $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$ . Покажите, что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \quad (x \in X)$$

корректно определяет норму на  $X/N$ .

**1.11.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с мерой, и пусть  $p, q \in (1, +\infty)$  таковы, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- 1) Докажите, что если  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  и  $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$ , то функция  $fg$  интегрируема и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- 2) Из неравенства Гёльдера выведите, что  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  — векторное пространство, и что справедливо *неравенство Минковского*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)).$$

**1.12.** Пусть  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ .

- 1) Докажите, что существует такая константа  $C = C_{a,b,p,q} > 0$ , что  $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$  на пространстве  $C[a, b]$ .  
 2) Найдите наименьшую константу  $C_{a,b,p,q}$  с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.  
 3) Эквивалентны ли нормы  $\|\cdot\|_p$  и  $\|\cdot\|_q$  на  $C[a, b]$  при  $p \neq q$ ?

**1.13.** Проверьте, что измеримая функция существенно ограничена тогда и только тогда, когда она эквивалентна некоторой измеримой ограниченной функции.

**1.14.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с мерой, и пусть  $f$  — неотрицательная существенно ограниченная функция на  $X$ . Напомним (см. лекцию), что ее *существенная верхняя грань* определяется формулой

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \left\{ \sup_{x \in E} f(x) : E \subset X, \mu(X \setminus E) = 0 \right\}.$$

Докажите, что  $\inf$  в этой формуле достигается. Как следствие,  $\operatorname{ess\,sup} f = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = 0$  п.в.

**1.15.** Докажите, что если  $f = g$  п.в., то  $\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g$ .

**1.16.** Пусть  $f \in C[a, b]$ . Докажите, что  $\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

**1.17.** Докажите, что  $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$  — векторное пространство, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

задает полунорму на  $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ .

**1.18.** Пусть  $\mu(X) < \infty$ . Докажите, что  $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$  при  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Чему равна норма оператора вложения  $L^q(X, \mu)$  в  $L^p(X, \mu)$ ?

**1.19.** Докажите, что  $L^p[a, b] \neq L^q[a, b]$  при  $p \neq q$ .

**1.20.** Пусть  $X = \mathbb{N}$ , и пусть  $\mu$  — «считающая» мера на  $\sigma$ -алгебре всех подмножеств  $\mathbb{N}$ , заданная формулой  $\mu(A) = |A|$  (число элементов в  $A$ ). Убедитесь, что  $L^p(\mathbb{N}, \mu) = \ell^p$  для всех  $1 \leq p \leq \infty$ . Сопоставьте это наблюдение с результатом задачи 1.7 и убедитесь, что результат задачи 1.18 не переносится на случай, когда  $\mu(X) = \infty$ .

**1.21.** Покажите, что  $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$  при  $p \neq q$ . Полезно сравнить результат этой задачи с задачами 1.7 и 1.18.