Домашняя часть предварительного экзамена

Желающие сдать письменный досрочный экзамен за 1 модуль должны принести на него тетрадь с записью решений из этого списка. В нем, с учетом подпунктов, 21 задача. Должны быть правильно решены не менее 17 из них.

1. Имеется определение действительных чисел через системы вложенных отрезков (действительные числа определяются как классы эквивалентности стягивающихся систем вложенных отрезков с рациональными концами).

   а) расшифруйте определение и докажите его эквивалентность определению действительных чисел через дедекиндовы сечения;

   б) дайте определения суммы чисел и отношения порядка и докажите их корректность.

2. Показать, что любое непустое ограниченное открытое множество на числовой оси является объединением конечного или счетного количества непересекающихся интервалов.

3. Могут ли следующие множества M и N быть множествами предельных точек некоторой последовательности:
$$M = \{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}, \qquad N = \{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}\ ?$$

4. Пусть последовательность x_n удовлетворяет свойству:
$$\forall \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N}\ \ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N\ \ \text{справедливо}\ \ |x_n - x_{n+k}| < \varepsilon.$$
   Обязательно ли она фундаментальна? Либо докажите, либо приведите контрпример.

5. Пусть последовательность $r_n > 0$ такова, что последовательность $a_n = \sum_{k=1}^{n} r_k$ сходится. Доказать, что если последовательность b_n ограничена: $|b_n| \leqslant C$, то последовательность $\sum_{k=1}^{n} b_k r_k$ также сходится.

6. Доказать, что функция Римана, принимающая значение 0 в иррациональных точках отрезка и значения q^{-1} в рациональных точках отрезка вида p/q (это несократимая дробь), непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных.

7. Привести пример взаимно однозначной функции $f : [0, 1] \to [0, 1]$, не являющейся монотонной. Доказать, что непрерывная взаимно однозначная функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ обязательно монотонная.

8. Привести пример равномерно непрерывной неограниченной функции. Доказать, что если область определения равномерно непрерывной функции — ограниченное множество, то эта функция ограничена.

9. Доказать, что существует вещественное число α, квадрат которого равен 2. Доказать, что число α иррационально.

10. Сходится ли последовательность $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$?

11. Для каждой бесконечной последовательности из двух букв A и B обозначим через a_n количество букв A среди n первых букв последовательности. Если существует $a = \lim n^{-1}a_n$, то он называется частотой буквы A. Приведите пример последовательности, для которой частота не определена. По рациональному числу p/q постройте последовательность, для которой частота определена и равна p/q. По иррациональному числу α постройте последовательность, для которой частота определена и равна α.

12. Пусть $\lim x_n = A$. Доказать, что $\lim \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = A$.

13. Пусть a_n и b_n — две последовательности вещественных чисел, причём b_n положительна, неограничена и строго возрастает (хотя бы, начиная с некоторого члена). Тогда, если существует предел

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \text{ то существует предел } B = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{и} \quad A = B.$$

14. Доказать, что для последовательности чисел Фибоначчи $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ определен предел последовательности f_{n+1}/f_n и найти его.

15. Доказать, что последовательность $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \cos x_n$ сходится. К чему она сходится?

16. Доказать, что $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1}$ (определение числа $e = \lim_{n\to\infty}(1+n^{-1})^n$ предполагается известным).

17. Покажите, что:

$$a)\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 = o(x) \text{ при } x \to 0; \qquad б)\ x_1 = 2a-\frac{1}{a}+o\left(\frac{1}{a}\right) \text{ при } a \to +\infty,$$

где x_1 - больший корень уравнения $x^2 - 2ax + 1 = 0$.

18. Замкнуто ли множество вещественных чисел, которые можно записать, не используя в десятичной записи цифру 5?

19. Доказать, что функция $a\sin(x+\varphi) + b\sin(2x+\psi)$ имеет на периоде (например, на промежутке $(-\pi, \pi]$) по крайней мере 2 различных нуля (значений аргумента, при которых функция обращается в 0) при всех значениях параметров.