Листок 1. Предел последовательности

Анализ, 1 курс, **11.09.2013**

Срок сдачи листка — до 2 октября включительно.

Задачи можно сдавать на математическом практикуме по анализу, а также, по согласованию с преподавателями, ведущими математический анализ на 1 курсе, на их консультационных часах. Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее 15 баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

Определение **1.** Про числовую последовательность $\{a_n\}$ говорят, что она сходится, если существует такое число A, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполнено $|A - a_n| < \varepsilon$. Число A называется пределом последовательности и обозначается через

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

1⋄1^0 Докажите, что любая последовательность имеет не более одного предела, причем если он существует, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

1⋄2^0 Докажите, что монотонная и ограниченная последовательность сходится.

1⋄3^0 Дайте определение **а)** неограниченной последовательности; **б)** последовательности, стремящейся к ∞; **в)** последовательности, стремящейся к $+\infty$ (или к $-\infty$). Для каждой пары свойств выясните, является ли одно следствием другого, если да, то докажите, если нет, то приведите пример.

1⋄4^0 **а)** Докажите, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ при $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ (неравенство Я. Бернулли). **б)** Докажите, что геометрическая прогрессия стремится к нулю, если основание по модулю меньше 1, и к бесконечности если > 1.

1⋄5^0 Докажите по указанию преподавателя одно или несколько из следующего списка утверждений:
– произведение ограниченной последовательности на последовательность, стремящуюся к нулю, стремится к нулю;
– если все $a_i \neq 0$, то $a_n \to 0$ равносильно $1/a_n \to \infty$;
– $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$;
– $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;
– $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, если $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.
– (Лемма о двух милиционерах.) Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для всех n, и пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$. Докажите, что существует $\lim_{n\to\infty} b_n$, равный A.

1◇6^0 Найдите $\lim_{n\to\infty} a_n$, если **а)** $a_n = \sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}$; **б)** $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}}$; **в)** $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, где $P(n)$ и $Q(n)$ – многочлены (укажите все возможные варианты в зависимости от $P(n)$ и $Q(n)$).

1◇7^0 Сходятся ли последовательности
а) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;
б) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$;
в) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$?

1◇8 **а)** Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.
б) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

1◇9* Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и найдите ее предел.

1◇10 **а)** Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает.
б) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ монотонно возрастает, ограничена и тем самым имеет предел. Предел этой последовательности обозначают буквой e.

1◇11 Найдите пределы последовательностей **а)** $a_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{1}}}}}_{n}$;

б***)** $a_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + n\sqrt{1}}}}$.

1◇12 Существует ли предел последовательности $a_n = \sin n$?

1◇13^0 **а)** Докажите, что, если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = a$.
б) Покажите, что обратное неверно.

1◇14* Числами Фибоначчи называются элементы последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентно: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, и найдите его.

1◇15 Докажите, что число $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ равно пределу последовательности

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

1◇16* Докажите иррациональность числа e. (Указание: Предположите обратное. Оцените величину $|e - a_n|$ и докажите, что она не может быть рациональной.)