Темы курсовых Пятова П.Н.

1. **Теорема Эйлера о пятиугольных числах** (1 курс).
   Предлагается разобрать два доказательства этой теоремы: краткое (см. Г.Харди *"Двенадцать лекций о Рамануджане"*, лекция 6.) и поучительное (см. David M.Bressoud, *"Proofs and confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture"*, глава 2) .

2. **Многочлены Гаусса и q-биномиальная теорема** (1 курс).
   q-биномиальная теорема – это весьма содержательное обобщение бинома Ньютона. David M.Bressoud, *"Proofs and confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture"*, § 3.1, стр.73-80.

3. **Формула крюков для подсчета числа стандартных таблиц Юнга** (1 курс)
   Диаграмма Юнга – это набор клеток на клетчатом тетрадном листе, скажем, в его первом квадранте, расположенных так, как если бы они притягивались к обеим сторонам квадранта. Диаграммы Юнга, состоящие из N клеток являются графическими представлениями всевозможных разбиений числа N в сумму натуральных слагаемых. Стандартные таблицы Юнга – это диаграммы, в клетках которых расставлены числа от 1 до N так, чтобы они возрастали слева-направо и снизу-вверх в строках и столбцах диаграммы. Диаграммы и стандартные таблицы Юнга применяются в теории представлений групп, при этом важно знать, сколько различных стандартных таблиц отвечают одной диаграмме Юнга. Формула крюков дает ответ на этот вопрос.

4. **Задача о замощении прямоугольной доски доминошками** (1-2 курс).
   Важной характеристикой всякой матрицы является ее определитель. Оказывается, что из определителя кососимметричной матрицы всегда можно извлечь квадратный корень (в кольце многочленов от матричных компонент). Получившаяся величина называется Пфаффианом. Предлагается разобраться с определением Пфаффиана и, используя его, решить комбинаторную задачу о числе замощений прямоугольной области косточками домино.
   М.Н. Вялый, *"Пфаффианы и искусство расставлять знаки"*, Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, стр. 129-142, 2005.

5. **Плоские разбиения и непересекающиеся пути на решетке** (1-2 курс).
   Предлагается вывести производящую функцию Мак-Магона для числа плоских разбиений (так называются трехмерные обобщения диаграмм Юнга) с использованием техники счета непересекающихся путей на решетке.
   David M.Bressoud, *"Proofs and confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture"*, главы 2,3; John R. Stembridge, *"Nonintersecting Paths, Pfaffians, and Plane Partitions"*, Advances in Mathematics, v.83, p.96-101, 1990.

6. **Замечательные детерминанты** (1-2 курс)
   Предлагается разобрать сюжеты из статьи Кристиана Краттенхалера – C.Krattenthaler *"Advanced determinant calculus"*(arXiv:math.CO/9902004), посвященной различным комбинаторным методам вычисления определителей.

7. **Суперсимметрические многочлены** (1-2 курс).
   Суперсимметрическими называются полиномы от двух наборов переменных $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ и $Y=\{y_1,\dots,y_m\}$, симметричные по переменным каждого из наборов (по отдельности) и такие, что при подстановке $y_1 = -x_1$ они перестают зависеть от x_1. Задача состоит в том, чтобы описать кольцо таких полиномов.
   P. Pragacz, A. Thorup *"On Jacobi-Trudy Identity for Supersymmetric Polynomials"*, Advances in Mathematics, v.95, p.8-17, 1992.

8. **Алгебра Темперли–Либа и ее представления на путях Дика** (2-4 курс).
С группой кос связаны несколько семейств конечномерных алгебр, обладающих богатой комбинаторной структурой и имеющих важные применения в физических моделях. Одно из таких семейств – семейство алгебр Темперли-Либа. Предлагается разобраться с определением этих алгебр, изучить их представления в пространстве путей Дика, и ознакомиться с применением этих представлений в описании стохастического процесса роста одномерной пленки.

9. **R-матричные представления группы кос** (2-3 курс).
R-матрица – это обратимый оператор, действующий в тензорном квадрате конечномерного пространства и удовлетворяющий уравнению Янга-Бакстера. С каждым таким оператором связана серия представлений групп кос B_n. Предлагается поупражняться в построении R-матриц, действующих на пространствах малых размерностей.

10. **Квантовые матричные алгебры и обобщенная теорема Кэли-Гамильтона** (3-4 курс, 1М курс).
Квантовые матричные (QM-) алгебры – ассоциативные алгебры, определяемые в терминах образующих и соотношений. Образующими этих алгебр выступают компоненты некоторой матрицы. На образующие накладываются квадратичные соотношения специального вида, в записи которых используются R-матрицы (см. тему 9). QM-алгебры являются разделом теории квантовых групп, они применяются в исследовании интегрируемых моделей квантовой и статистической физики. Оказывается матрицы генераторов QM-алгебр ведут себя подобно обычным матрицам, и для них можно определить понятие собственных значений и собственных векторов, и сформулировать аналог теоремы Кэли-Гамильтона.