Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 1.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения обсуждаются на семинарах.

Если не оговерено обратное, то под кольцом в этом листке подразумевается коммутативное кольцо с единицей.

Задача 1. Проверьте, что при умножении комплескных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Задача 2. Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов.

Задача 3. Выпишите формулу для комплексных корней степени n из единицы, используя тригонометрическую форму комплексного числа. Получите явную формулу (в радикалах), когда $n = 3,\ 4,\ 5$.

Задача 4. Опишите явно наименьшее подкольцо в $\mathbb{C}$, содержащее $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.

Задача 5. а) Докажите, что существует многочлен T_n, такой что $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва первого рода*).

б) Докажите, что существует многочлен U_n, такой что $\sin(nx) = \sin(x)U_{n-1}(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва второго рода*).

Задача 6. Постройте изоморфизм между полем комплексных чисел и подкольцом в кольце вещественных 2×2 матриц, состоящем из матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Задача 7. Проверьте непосредственно, что умножение 2×2 матриц ассоциативно.

Задача 8. Напомним, что линейному преобразованию плоскости

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

мы ставили в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что это соответстие является изоморфизмом кольца 2×2 матриц и кольца эндоморфизмов плоскости (в частности, умножение матриц соответствует композиции эндоморфизмов).

Задача 9. Опишите все кольца, в которых $0 = 1$.

Задача 10. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$1)\ -a = (-1) \cdot a; \quad 2)\ a \cdot 0 = 0; \quad 3)\ (-a) \cdot b = (-ab).$$

Задача 11. Докажите, что среди колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ нет двух изоморфных.

Задача 12. Постройте поле из n элементов для $n = 4$ и $n = 9$.

Задача 13. Классифицируйте (с точностью до изоморфизма) кольца из четырёх элементов.

Задача 14. Приведите пример двух изоморфных, но не совпадающих подколец в $\mathbb{C}$.