Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Листок 1. Срок сдачи 17 октября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно на математическом практикуме. Настоятельно рекомендуется предварительно записывать решения, чтобы ничего не забыть.

Если не оговерено обратное, то под кольцом в этом листке подразумевается коммутативное кольцо с единицей, а через p обозначается простое натуральное число.

Задача 1. Пусть x — элемент кольца, такой что $x^n = 0$ для некоторого натурального n (такие элементы называются *нильпотентными*). Докажите, что элемент $1 + x$ обратим.

Задача 2. Докажите, что конечное кольцо без делителей нуля является полем.

Задача 3. Докажите, что сравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$$

имеет нетривиальное решение в целых числах (*тривиальное решение* — это решение $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \mod p$).

Задача 4. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \mod 4$.

Задача 5. Определим кольцо $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ *гауссовых вычетов по модулю* p как множество классов эквивалентности целых гауссовых чисел сравнимых по модулю p со сложением и умножением также по модулю p. Докажите эквивалентность следующих трёх утверждений:
(а) Кольцо $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ является полем.
(б) Уравнение $x^2 + y^2 = p$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$.
(в) Сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$.

Задача 6. Докажите, что число $\frac{2+i}{2-i}$ не является корнем из единицы.

Задача 7. Выразите $\sqrt{p}$ через i и корни степени p из единицы, используя только арифметические операции.

Задача 8. Решите уравнение в кольце 2×2 матриц с вещественными коэффициентами

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Определим *кватернионы* $\mathbb{H}$ как упорядоченные четвёрки вещественных чисел (a, b, c, d) (обозначаемые $a + bi + cj + dk$). Их можно складывать покоординатно и умножать по правилам $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Докажите, что относительно этих операций кватернионы образуют некоммутативное кольцо с единицей, где у каждого ненулевого элемента есть обратный.

Задача 10. Отождествим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с множеством *мнимых кватернионов* $xi + yj + zk$. Для каждого кватерниона q определим преобразование R_q пространства $\mathbb{R}^3$ по формуле

$$R_q : v \mapsto qvq^{-1}.$$

Проверьте корректность этого определения и докажите, что R_q является поворотом.