

Темы курсовых работ
профессор В.А. Тиморин

Курс	Тема
1 курс	1. Аналоги задачи Сильвестра. Следующая задача Сильвестра нашла многочисленные и глубокие обобщения: существует ли набор точек на плоскости, такой, что каждая пара точек коллинеарна некоторой третьей точке, но не все точки коллинеарны? <u>Источники:</u> В. Тиморин, С. Табачников, <i>Прямая Сильвестра</i>, Квант, 2009. № 5 и 6. С. 2-6 и 6-9 2. Размерность Хаусдорфа. Хаусдорф ввел понятие размерности, имеющее смысл для любого метрического пространства - размерность Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа может быть любым неотрицательным действительным числом, в частности, дробным или даже иррациональным. Таковы размерности многих фрактальных множеств, возникающих в топологии и теории динамических систем (известные примеры включают канторовы множества, ковры Серпинского, множества Жюлиа, и т.д.). Посчитайте хаусдорфовы размерности некоторых фракталов. <u>Источники:</u> К. Falconer, <i>Fractal geometry</i>, Wiley 2003 3. Отображения, переводящие прямые в прямые. Мебиус в 1827 году доказал, что взаимно-однозначное отображение проективной плоскости в себя, переводящее прямые в прямые, является проективным (т.е. дробно-линейным). Хотя доказательство Мебиуса предполагало непрерывность рассматриваемого отображения, позже выяснилось, что над действительными числами предположение непрерывности не нужно. (Это связано с отсутствием нетривиальных автоморфизмов поля действительных чисел). <u>Источники:</u> М. Берже, <i>Геометрия</i>, Том 1, М: Мир, 1984
1-2 курс	1. Геометрия тканей. Ткань на плоскости - это несколько семейств (скажем 3) кривых, таких что каждое семейство замечает область на плоскости, и кривые из разных семейств не касаются. Разберите теорему о том, как выглядят прямолинейные 3-ткани, переводящиеся заменой координат в ткань из прямых, параллельных сторонам правильного треугольника. <u>Источники:</u> В. Бляшке, <i>Введение в геометрию тканей</i>, Физматгиз, 1959 2. Траектории частиц в центральном поле. Приведите пример, когда траектория частицы в центральном поле плотна в некотором плоском

	кольце. Опишите все центральные поля, в которых все ограниченные траектории замкнуты. <u>Источники:</u> В.А. Арнольд, <i>Математические методы классической механики</i>, URSS, 2003 3. Статистика цепных дробей. Как часто данное натуральное число встречается в качестве элемента цепной дроби? <u>Источники:</u> А.Я. Хинчин, <i>Цепные дроби</i>, Физматлит, 1960 4. Композиция бинарных квадратичных форм. Бинарная квадратичная форма - это функция вида $f(x) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$, $x = (x_1, x_2)$, где a, b, c - постоянные коэффициенты. Важной задачей является изучение множества значений квадратичной формы с целыми коэффициентами (на векторах с целыми координатами). Пусть f и g - квадратичные формы одинакового дискриминанта. Тогда существует квадратичная форма h и билинейное отображение $s: \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, такие, что $h(s(x,y)) = f(x) g(y)$. В частности, любое значение формы h является произведением значения формы f на значение формы g. Этот факт заметил Гаусс, и ввел естественную билинейную операцию s, превращающую несократимые квадратичные формы данного дискриминанта (рассматриваемые с точностью до положительных целочисленных замен переменных) в абелеву группу. Операция в этой группе называется композицией квадратичных форм. Приведите и докажете явные формулы для композиции (например, следуя Гауссу и Дирихле). <u>Источники:</u> К.Ф. Гаусс, <i>Труды по теории чисел</i>, Изд-во АН СССР, Москва, 1959 Л. Дирихле, <i>Лекции по теории чисел</i>, М: ОНТИ, 1939
1-3 курс	1. Задача Гурвица про произведения сумм квадратов. В 1898 году Гурвиц поставил такую задачу: описать все тройки натуральных чисел (r,s,n), для которых возможна формула вида $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$. В этой формуле все z_k - билинейные комбинации переменных x_i и y_j. Примеры формул такого вида можно получить, исходя из правила умножения комплексных чисел, кватернионов или октав. Задача Гурвица открыта до сих пор, хотя многие выдающиеся математики пытались ее решить, и созданный ими топологический аппарат (характеристические классы, вещественная К-теория) оказался полезным во многих других областях математики. Сам Гурвиц и, независимо, Радон, полностью описали случай $s = n$. Он связан с представлениями алгебр Клиффорда. Имеется еще несколько менее общих формул рассматриваемого вида. Разберите примеры таких формул (начиная с кватернионов и октав). Для 2 и 3 курсов - классифицируйте формулы Гурвица с малым числом слагаемых. <u>Источники:</u> И.Л. Кантор, А.С. Солодовников, <i>Гиперкомплексные числа</i>, Москва: Наука, 1973

	D. Shapiro, <i>Products of sums of squares</i>, Expo. Math. 2 (1984), 235-261 B. Eckmann, <i>Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon ueber die Komposition quadratischer Formen</i>, Comm. Math. Helvetici (1929), 358-366
2 курс	1. Число вращения, теорема и пример Данжуа. Рассмотрим гомеоморфизм окружности на себя. Сопряжен ли он повороту? Оказывается, для дважды дифференцируемого гомеоморфизма с иррациональным числом вращения, ответ положительный. А если гомеоморфизм только один раз дифференцируем, есть контрпримеры. <u>Источники:</u> А. Каток, Б. Хасселблат, <i>Введение в современную теорию динамических систем</i>, Факториал, 1999
2-3 курс	1. Теорема о максимальном числе граней. П. Макмюллен в 1970 году решил следующую задачу, стоявшую открытой довольно долго: среди всех выпуклых многогранников в $\mathbf{R}^n$ с фиксированным числом вершин, найти многогранники с максимальным числом граней размерности k. Интересный класс многогранников (циклические многогранники) решает эту задачу одновременно для всех k - это было гипотезой, которую и доказал Макмюллен. Опишите комбинаторные свойства циклических многогранников. Объясните доказательство теоремы о максимальном числе граней. Постройте другие примеры многогранников, реализующие максимальное число граней. <u>Источники:</u> А. Бренстед, <i>Введение в теорию выпуклых многогранников</i>, М: Мир, 1988 В. Тиморин, <i>Комбинаторика выпуклых многогранников</i>. М: МЦНМО, 2002. 2. Множество Мандельброта связно. Множество Мандельброта - один из самых известных фракталов. Это множество всех комплексных чисел c, для которых последовательность $c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$, ограничена. Множество Мандельброта очень важно в теории комплексных динамических систем - благодаря явлению ренормализации, оно возникает практически во всех случаях, когда рассматриваются итерации голоморфных отображений, аналитически зависящих от параметра. Как доказали Дуади и Хаббард, множество Мандельброта связно. Разберите доказательство этого утверждения. Знаменитая гипотеза о том, что множество Мандельброта также локально связно, на протяжении многих лет не поддается активным атакам со стороны многих замечательных математиков. <u>Источники:</u> Дж. Милнор, <i>Голоморфная динамика</i>, РХД, 2000 L. Carleson, T.W. Gamelin, <i>Complex dynamics</i>, Springer, 1992 3. Метод Ньютона. (руководство совместно с Д.Шляйхером). <u>Источники:</u> J. H. Hubbard, D. Schleicher, S. Sutherland, <i>How to Find All Roots of Complex Polynomials by Newton's Method</i>. Inventiones Mathematicae vol. 146 (2001), no.1, pp. 1-33 Carleson, T.W. Gamelin, <i>Complex dynamics</i>, Springer, 1992
3 курс	1. Бильярды. (руководство совместно с С.Табачниковым). <u>Источники:</u>

