Поволоцкий Александр Маркович

Темы курсовых работ

1. Задачи об электроцепях и матричная теорема Кирхгофа. (1-2 курс)

Законы Кирхгофа для электрических цепей, изучаемые в школьном курсе физики, позволяют решать задачи о нахождении токов и напряжений в ребрах и вершинах произвольных графов с произвольными проводимостями ребер. Формальная запись этих законов эквивалентна разностному аналогу уравнения Пуассона, в котором место оператора Лапласа занимает матрица дискретного лапласиана для данного графа. Исследование этого уравнения приводит к замечательным комбинаторным аналогиям, которые предлагается исследовать в порядке возрастания трудности:

1) Теорема Кирхгофа. Показать, что главный минор дискретного Лапласиана даёт число (производящую функцию) остовных деревьев графа.
2) На квадратной решетке существует взаимнооднозначное соответствие между остовными деревьями на чётно-чётной подрешетке и плотными димерными покрытиями (т.е. покрытие решетки молекулами, каждая из которых занимает два соседних.). Вычислить число остовных деревьев на квадратной решетке. Использовать полученный результат для нахождения числа димерных покрытий.
3) Применяя теорему Кирхгофа к квадратной решетке с выломанными ребрами, вычислить вероятность листа остовного дерева а узле решетки (т.е. вероятность того, что данный узел является окончанием ветки дерева).

Татт У. Теория графов. Пер. с англ. - М.:Мир, 1988, 424 с.
Приезжев В. Б. "Задача о димерах и теорема Кирхгофа" *УФН* **147** 747–765 (1985)

2. Когда случайное блуждание возвращается? (1-3 курс)

   Рассмотрим случайное блуждание путешественника на D-мерной кубической решетке, когда он совершает шаги вдоль любого из 2 D ребер, исходящих из данного узла, с равной вероятностью. Когда возвращение путешественника в исходную точку предопределено, а когда нет?

   Литература: B.D. Hughes, *Random Walks and Random Environments. Volume 1: Random Walks.* Clarendon Press, Oxford, 1995

3. Пространственная конденсация частиц в процессе с нулевым радиусом взаимодействия (2-3 курс).

   Рассмотрим частицы, прыгающие на одномерной решетке, причем интенсивность выхода частицы из узла зависит только от числа частиц в данном узле. Пусть решетка свернута в кольцо. Замечательным фактором является то, что, несмотря на пространственную однородность, при некотором подборе интенсивностей конечная доля всех частиц в достаточно большой системе в конце концов соберется в одном узле. Другими словами происходит пространственная конденсация частиц.

   Задача: Исследовать стационарное состояние, в которое система приходит по прошествии достаточно большого времени. Научиться вычислять моменты стационарного распределения вероятности числа частиц в узле решетки и потока частиц через узел. При каком выборе интенсивностей будет наблюдаться конденсация?

Литература: M. R. Evans, Phase transitions in one-dimensional nonequilibrium systems, Braz. J. Phys. vol.30 no.1 São Paulo Mar. 2000, http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-97332000000100005&script=sci_arttext

4. Задача о димерах на гексагональной решетке. (3 курс)

   Используя соответствие конфигураций димеров на гексагональной решетке и ансамбля непересекающихся путей на квадратной решетке вычислить число димерных покрытий решетки или в более общей постановке задачи статистическую сумму димеров на решетке. Изучив свободную энергию такой системы, можно показать, что при некотором соотношении трех больцмановских весов димеров (т.е. вероятностей занятия димером ребер, направленных вдоль каждой из трех образующих гексагональной решетки) происходит фазовый переход Кастеляйна – Покровского - Талапова в полностью замороженную фазу, где присутствуют только димеры, направленные вдоль одной из образующих.

   Литература: P.W. Kasteleyn, J. Math. Phys. 4 (1963) 287