

Темы курсовых работ
на 2013-2014 учебный год
профессор Т.Такебе

1 курс	1. Вычисление π $\pi = 3,14\dots$ - все знают, но почему? Огромное количество попыток вычислять π сделано и в древние времена (например, Архимед получил оценку $3+10/71 < \pi < 3+1/7$), и сейчас. (В 2011 году А. J. Yee и Shigeru Kondo рассчитали последовательность из десяти триллионов десятичных разрядов.) А также существует формула, которая позволяет извлечь любую конкретную шестнадцатеричную или двоичную цифру числа π без вычисления предыдущих. <i>Пример задач:</i> - Самостоятельно вычислить π, пользуясь разными методами. (По крайней мере, методом Архимеда; формулой Leibniz-a (если можно, с улучшением сходимости); формулой Machin-a; методом арифметико-геометрического среднего. Есть еще много других методов.) <i>Обязательно</i> - доказать использованные формулы (для математиков, это важнее чем вычисления); - оценить погрешность, т.е., обосновать, сколько из рассчитанных цифр точно, НЕ сравнивая с известными результатами. Рекомендую вычислить сначала руками, т.е., не используя компьютера. Потом вычисление с компьютером будет интереснее. Если вы сможете установить рекорд, прекрасно! <u>Литература:</u> сами найдите. Много информации и богатый список литературы находятся в интернете. Например: http://ru.wikipedia.org/wiki/Pi
1-2 курс	1. Ортогональные многочлены. В линейном пространстве многочленов $R[x]$ (и в $C[x]$) можно определять разные скалярные произведения с помощью интеграла. Ортогональные многочлены - естественные ортонормированные базисы этого пространства и имеют интересные свойства. <i>Пример задач:</i> - Вывод формулы Christoffel-Darboux и её приложение. - Вывод формулы квадратуры Гаусса и конкретное вычисление с этой формулой. <u>Литература:</u> Gabor Szego "Orthogonal Polynomials" Ch. II & III (with examples in Ch. IV & V) или русский перевод этой книги. (Интеграл Лебега использован, но не существует для нас.) Полиа, Сеге «Задачи и теоремы из анализа» Например, Отдел Шестой.
1-3 курс	1. Комбинаторика (плоские разбиения, непересекающиеся пути) и

	линейная алгебра Плоское разбиение – трёхмерное обобщение диаграммы Юнга. Число плоских разбиений в определённом ящике равно числу непересекающихся путей на некотором графе. А число непересекающихся путей на графе вычисляется определителем и функциями Шура. <i>Примеры задач:</i> - Доказательство формулы Макмагона (Macmahon formula) <i>(для 1-2 курса)</i> - Вычисление симметрических плоских разбиений с помощью формулы ЛГВ <i>(для 1-2 курса)</i> - Интерпретация результата Окунькова-Решетихина-Вафы с этой точки зрения <i>(высшая проблема)</i> <u>Литература:</u> D. M. Bressoud, Proofs and Confirmations, Cambridge University Press. K. Takasaki, Linear algebra and enumeration, в японском журнале «Sugaku-seminar» («Семинар по математике», журнал похожий на «Квант»); Такебе переводил этот текст на русский язык. A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals, in “The Unity of Mathematics” ed. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhauser.
2-3 курс	1. Солитоны Известно, что дифференциальные уравнения в частных производных, которые являются нелинейными по неизвестной функции, вообще очень трудно решать. Но специальные уравнения (уравнение КдФ, уравнение КП, ...) можно решить забавными вычислениями рядов дифференциальных операторов. <i>Примеры задач:</i> - явная формула для 2-солитонного решения ($u(t,x) = \dots$) КдФа; явная формула тау-функции находится в разных литературах. - явная формула для N-солитонного решения КдФа. - "Visualization" таких решений. Например посмотрите http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/gallery/solitons/index-e.html - вывод уравнения Буссинеска (Boussinesq equation) из иерархии КП - 1,2,...N-солитонные решения Бусинеска: тау-функция - почти такая же как КдФ. А $u(t,x)$? Visualization? - разные явные решения КдФа, Буссинеска, КП, ... (примеры: алгебро-геометрическое решение Кричевера; решение, тау-функция которого является функцией Шура; ...) <u>Литература:</u> Т. Мива, М. Джимбо, Э. Датэ «Солитоны» гл. 1, 2, 3. <i>(для 2 курса)</i> Дальше. гл. 4-6: решения дифференциальных уравнений с помощью алгебры Клиффорда. <i>(для 3 курса)</i> (Теория функции комплексной переменной немного использована, но можно обходить.) 2. Уравнение Панлеве Сто лет назад П. Панлеве и его ученик Б. Гамбие классифицировали обыкновенные дифференциальные уравнение второго порядка и нашли шесть специальных уравнений, которые сегодня называются «уравнениями Пенлеве» (Painleve equations). Раньше они считались «изолированной математикой». Но после обнаружений физиков в 1970-ых годах оказалось, что такие уравнения связаны с разными областями математики (например: алгебраическая

	геометрия поверхностей, группа Вейля (Weyl group), интегрируемые системы,...). <i>Примеры задач:</i> - явное описание действие группы Вейля на тау-функцию - особые решения рационального/гипергеометрического типа <u>Литература:</u> М. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs 223, American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-3221-9
3 курс	1. Уравнение Лёвнера Теорема Римана утверждает, что на каждой односвязной области D существует голоморфная функция $f(z)$, которая является однозначным соответствием между D и единичным диском. Если D деформируется по параметру t некоторым образом, то $f(z)$ зависит от t и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое называется уравнением Лёвнера (Loewner equation). <i>Примеры задач:</i> - Доказательство уравнения Лёвнера. - Доказательство уравнения Лёвнера хордового типа (chordal Loewner equation). - Доказательство гипотеза Бибербаха (Bieberbach conjecture) (высшая проблема). <u>Литература:</u> P. L. Duren, Univalent Functions, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 259, Springer Verlag.