

Темы курсовых работ

1. Вокруг обратной задачи теории потенциала (3-4 курс).

Предмет теории потенциала - гравитационные или электрические поля, создаваемые телами. Их потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа вне тела и уравнению Пуассона внутри его. Обратная задача состоит в определении формы тела по создаваемому им полю или, что то же самое, по набору величин, которые называются гармоническими моментами тела. Это большая и сложная область со множеством интересных приложений, имеющая глубокие связи с фундаментальными вопросами математической физики. Так, в двух измерениях обратная задача теории потенциала тесно связана с теорией интегрируемых систем. Возможные темы для самостоятельного изучения/исследования: а) известные результаты о существовании и единственности решения и их доказательства, б) явные примеры, когда решение не единственно, в) вариационные принципы в обобщенной обратной задаче теории потенциала, соотношения взаимности для гармонических моментов в двух и трех измерениях, г) "игрушечный" (но поучительный) пример: обратная задача теории потенциала в одном измерении и ее связь с интегрируемыми системами.

Литература: А.Варченко, П.Этингоф, Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса, Наука, 1995 и ссылки там; А.Забродин, Бездисперсионный предел уравнения Хироты в некоторых задачах комплексного анализа, ТМФ 129 (2001) 239-257.

2. Модели случайных матриц (комплексные и нормальные матрицы) и бета-ансамбли (1-4 курс).

С этим связано множество интересных задач; мы выделим три, следующих в порядке сложности.

- а) Мера на многообразии комплексных и нормальных матриц. (Ответы здесь известны, но интересно найти различные и по возможности простые способы их получения или хотя бы продумать существующие.)

Мера (форма объема) на многообразии квадратных матриц с произвольными комплексными элементами факторизуется в произведение двух множителей, один из которых зависит только от собственных значений, а второй - от остальных ("угловых") координат на многообразии матриц. Предлагается вывести этот факт из первых принципов и найти явный вид фактора, зависящего от собственных значений, а также исследовать вопрос о том, какие матричные интегралы (т.е. интегралы по многообразию матриц) допускают явное вычисление.

Литература: M.Mehta, Random matrices (перевод: М.Мета, Случайные матрицы, МЦНМО, 2012).

- б) В некоторых специальных случаях модель нормальных случайных матриц любого конечного размера N допускает абсолютно явное решение. Большой интерес представляет предел $N \rightarrow \infty$. Предлагается изучить плотность распределения собственных значений и парные корреляционные функции плотностей на комплексной плоскости в этом пределе и получить для них точные и/или асимптотические формулы.

Литература: M.Mehta, Random matrices (перевод: М.Мета, Случайные матрицы, МЦНМО, 2012).

A.Zabrodin, Matrix models and growth processes: from viscous flows to the quantum Hall effect, hep-th/0412219, in: “Applications of Random Matrices in Physics”, pp. 261-318, Ed. E.Brezin et al, Springer, 2006.

- в) Двумерный бета-ансамбль (кулоновский газ с обратной температурой β) при $\beta \neq 1$ ($\beta = 1$ это модель комплексных или нормальных матриц).

Это по-настоящему сложная исследовательская задача, в которой не известны не только ответы на некоторые первоочередные вопросы, но и методы решения. Любое, даже малое продвижение может быть исключительно ценно для многочисленных приложений (например, к квантовому эффекту Холла). Для любителей счета на компьютере здесь огромное (почти непаханное) поле деятельности. Численные данные могут помочь в угадывании правильных гипотез о том, как ведут себя свободная энергия, плотность распределения заряда и другие величины в зависимости от β .

Литература: P.J.Forrester, Log-Gases and Random Matrices, London Mathematical Society Monographs, Princeton University Press.

A.Zabrodin and P.Wiegmann, Large N expansion for the 2D Dyson gas, hep-th/0601009, J. Phys. A.: Math. Gen. 39 (2006) 8933-8963.

3. Динамика полюсов решений иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП) (2-4 курс).

Это давний и интересный сюжет в теории интегрируемых систем, связывающий специальные классы решений интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегрируемые системы многих частиц в одном измерении. В общем случае требуется хорошее знание эллиптических функций. Однако, в вырожденных случаях - рациональном и тригонометрическом, - все необходимые вычисления совершенно элементарны (хотя иногда и громоздки). При этом ответы на некоторые вопросы неизвестны даже в вырожденных случаях. В последнее время интерес к этому сюжету возрос в связи с обнаружением неожиданных и еще плохо понятых связей с квантовыми интегрируемыми системами, которые решаются методом анзаца Бете.

Литература: И.М.Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики, т. 23, 79–136 (1983).

И.М. Кричевер, Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц, Функц. анализ и его прил., 14 (4), 45-54 (1980).