

Темы курсовых работ

Кириченко Валентина Алексеевна

1. (для 1-2 курсов) **Многогранники Ньютона и теорема Кушниренко**

Классическая теорема Безу о числе общих нулей n многочленов от n комплексных переменных верна для многочленов общего положения, и выражает число нулей через степени многочленов. Теорема Кушниренко обобщает теорему Безу, и выражает число нулей через многогранники Ньютона ("обобщенные степени") многочленов.

Литература:

- [Многогранники и уравнения](#) В.А.Тиморин, А.Г.Хованский // Математическое просвещение. Сер. 3, 2010. вып. 14. С. 30–57

2. (для 1-3 курсов) **Многочлены Шуберта**

По каждой перестановке n элементов можно определить многочлен от n переменных с целыми коэффициентами (многочлен Шуберта). Многочлены Шуберта изначально возникли для описания исчисления Шуберта на многообразии полных флагов в n -мерном пространстве (обобщении грассманиана), а затем стали активно изучаться комбинаторными методами. Тема для 1-2 курса — теорема Кириллова-Фомина, дающая комбинаторное описание мономов в многочлене Шуберта через приведенные диаграммы (*pipe-dreams*), реализующие данную перестановку. Тема для самостоятельного обдумывания - доказательство теоремы Кириллова-Фомина через митоз. Тема для 3 курса - теорема Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда и Демажюра о представлении циклов Шуберта на многообразии полных флагов многочленами Шуберта).

Литература:

- L. Manivel // Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci. SMF/AMS Texts and Monographs 6, 2001; (имеется неопубликованный русский перевод)
Очень хорошо написанная книга о комбинаторике и геометрии многообразий флагов, в частности, в главе 2 содержится теорема Кириллова-Фомина с доказательством
- A. Kirillov, S. Fomin // The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials, Discrete Mathematics, 153 (1996), 123-143
- Ezra Miller // [Mitosis recursion for coefficients of Schubert polynomials](#), J. Comb. Theory A, 103 (2003), no. 2, 223-235
Элементарный комбинаторный алгоритм (митоз) для выписывания всех приведенных диаграмм с данной перестановкой индукцией по длине перестановки. Также может быть использован для доказательства теоремы Кириллова-Фомина

3. (для 1-2 курса) **Цепная дробь для числа e (основания натурального логарифма)**

Интересно, что коэффициенты [цепной дроби для \$e\$](#) подчиняются простой закономерности.

Литература:

- А.Я.Хинчин // [Цепные дроби](#)
- статья в Википедии [Gauss's continued fraction](#)
- Todd and Vishal blog // [Continued fraction for \$e\$](#)

4. (для 1-2 курса) **Решение уравнений в радикалах**

Как найти явные формулы для корней уравнений степени 3 и 4? Почему не существует таких формул для корней уравнений более высоких степеней? Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

- А.Г.Хованский // Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности. М.: МЦНМО, 2007
- К.Ф.Гаусс // Арифметические исследования. М.: АН СССР, 1959

5. (для 2-3 курсов) **Группа монодромии гипергеометрической функции Гаусса**

Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b, c; z)$ – специальная функция одной комплексной переменной. Может быть задана как сумма (гипергеометрического) ряда, как интеграл или как решение фуксова дифференциального уравнения второго порядка с тремя особыми точками. Группу монодромии гипергеометрической функции можно найти явно (например, задать образующими и соотношениями), в частности, можно узнать при каких значениях комплексных параметров a, b, c она разрешима, коммутативна или конечна.

Литература: (все необходимые определения и методы для решения задачи можно найти в этих книгах, но самого решения в них нет)

- А.А.Болибрух // Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения
- В.И.Смирнов // Курс высшей математики (том 3, часть 2), 7-е издание, глава 5, пп 95-104
- Г.Бейтмен, А.Эрдейи // Высшие трансцендентные функции (том 1), глава 2, пп 2.1-2.7

6. (для 2-3-го курсов) Обобщённая задача Чаплыгина

Пилот самолёта хочет за фиксированное время облететь наибольшую площадь. Какова оптимальная траектория полёта для данной зависимости максимальной скорости самолёта от направления? Например, в условиях постоянного ветра, который сносит самолёт с одной и той же скоростью в одном и том же направлении получается обычная задача Чаплыгина (оптимальная траектория - эллипс). В частности, если ветра нет вовсе, то получается классическая изопериметрическая задача (оптимальная траектория - окружность). Предлагается найти другие интересные примеры, в которых оптимальная траектория может быть явно описана.

- В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин, Оптимальное управление.. - М. : Физматлит, 2005.
- Л.Н.Толстой, Много ли человеку земли нужно?

7. (для 2-3-го курсов) **Полные коники**

Сколько коник (на комплексной проективной плоскости) касается пяти данных коник ? Классическая задача исчислительной геометрии, поставленная Штейнером и решенная Шалем. Имеет важное историческое значение, так как поиски строгого решения стимулировали развитие разных областей алгебраической геометрии.

Литература:

- Ф. Гриффитс, Дж. Харрис // Принципы алгебраической геометрии (том 2), глава 6, п 1
Содержит как строгое решение методами алгебраической геометрии, так и неформальное элементарное решение методом Шаля.
- S.Kleiman // Chasles's enumerative theory of conics: A historical introduction, Studies in Algebraic Geometry, Mathematical Association of America Studies in Mathematics, 20, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1980, 117–138 (имеется электронная версия)
Интересный исторический очерк о задаче Шаля и ее влиянии на развитие теории пересечений.

8. (для 3-4 курсов и магистратуры) **Многогранники Ньютона-Окунькова многообразий Ботта-Самельсона**

Выпуклые тела Ньютона-Окунькова – это новая бурно развивающаяся область алгебраической геометрии. Пока известно очень мало явных описаний тел Ньютона-Окунькова. Особенно интересны случаи, когда они оказываются многогранниками. В качестве темы предлагается вычислить многогранники Ньютона-Окунькова интересного класса многообразий – разрешений Ботта-Самельсона многообразий Шуберта. Имеется гипотеза о том, как устроены эти многогранники для одного из естественных геометрических нормирований. Для другого нормирования имеется связь со струнными

многогранниками Беренштейна-Зелевинского-Литтельманна из теории представлений.

- V. Kiritchenko // [Divided difference operators on convex polytopes](#).
- K. Kaveh // [Crystal bases and Newton-Okounkov bodies](#)
- D. Anderson // [Okounkov bodies and toric degenerations](#)

9. (для 3-4 курсов и магистратуры) **Исчисление Шуберта**

Сколько прямых в трёхмерном пространстве пересекает четыре данные? Сколько прямых в R^4 пересекают 6 данных плоскостей? На эти и многие другие вопросы отвечает исчисление Шуберта. Исчисление Шуберта на грассманиане изучено лучше всего. Следующий по простоте случай - двушаговые многообразия флагов. Существует много разных способов вычислять произведения циклов Шуберта на грассманиане (так называемые правила Литтльвуда-Ричардсона). Некоторые из них обобщаются на двушаговые многообразия флагов. Вопрос об универсальном правиле Литтльвуда-Ричардсона для всех многообразий флагов (например, для многообразия полных флагов) пока открыт. В качестве темы предлагается выбрать одно из правил Литтльвуда-Ричардсона (см. ниже), разобрать его и попытаться обобщить.

Литература:

- L. Manivel // Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci. SMF/AMS Texts and Monographs 6, 2001; (имеется неопубликованный русский перевод)
Очень хорошо написанная книга о комбинаторике и геометрии многообразий флагов, в частности, в главе 1 - классическое правило Литтльвуда-Ричардсона, в главе 3 - основы исчисления Шуберта на многообразии полных флагов.
- Ravi Vakil // [A geometric Littlewood--Richardson rule](#)
Геометрический способ умножать циклы Шуберта: пересечение многообразий Шуберта последовательно вырождается в объединение многообразий Шуберта. Известно [обобщение](#) на двушаговые многообразия флагов, но оно использует очень сложную комбинаторику.
- Allen Knutson, Terence Tao, Christopher Woodward // [The honeycomb model of \$GL\(n\)\$ tensor products II: Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone](#)
Симметричное правило Литтльвуда--Ричардсона через пазлы. В приложении к статье Вакила (см. выше) обсуждается его связь с геометрическим правилом. Недавно было анонсировано [обобщение](#) пазлов на двушаговые многообразия флагов
- В.А.Кириченко, Е.Ю.Смирнов, В.А.Тиморин [Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда-Цетлина](#)
Исчисление Шуберта на многообразии полных флагов моделируется через пересечение граней в многогранниках. Тем самым можно пытаться использовать комбинаторику многогранников для построения правила Литтльвуда-Ричардсона на многообразии полных флагов.

10. (для 3-4 курсов и магистратуры) **Многогранники Гельфанда-Цетлина**

Многогранники Гельфанда-Цетлина впервые появились в теории представлений, затем использовались в алгебраической геометрии. Их можно определить элементарно с помощью простых неравенств. Про их комбинаторику почти ничего неизвестно. Например, число вершин вычислено только в самых простых случаях.

Литература:

- Pavel Gusev, Valentina Kiritchenko, Vladlen Timorin // [Number of vertices in Gelfand-Zetlin polytopes](#)
Посчитано число вершин в частных случаях, найдено уравнение на производящую функцию числа вершин в общем случае. Сформулированы открытые задачи.