Темы курсовых

1 курс
1. *Кубик Рубика.* Требуется описать группу вращений и допустимые положения кубика. Задача представляет собой конкретное введение в элементарную теорию групп.
W. D. Joyner "Mathematics of the Rubik's cube"
J. Chen "Group Theory and the Rubik's Cube"

2. *Почему интегралы не берутся.* Теорема Лиувилля дает ответ на классический и очень естественный вопрос о том, какие функции интегрируются в элементарных, а какие нет.
А. Г. Хованский "Топологическая теория Галуа"

1-3 курс

3. *Число классов идеалов квадратичных полей - арифметика, алгебра, анализ.* Число классов идеалов квадратичных полей возникает в самых разных задачах: при классификации квадратичных форм с данным дискриминантом, в задачах о решетках на плоскости, в задаче об описании модулей над кольцом целых квадратичного поля и т.д. Удивительным образом для этого числа имеется интерпретация в терминах значения некоторой аналитической функции – дзета-функции Дедекинда. Подобная связь – один из теоретико-числовых фактов, ведущих к очень глубоким теоремам и гипотезам.
З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич "Теория чисел"

4. *Евклидовы кольца*. Задача об описании полей алгебраических чисел с Евклидовыми кольцами целых (т. е. такими, в которых возможно деление с остатком) оказывается связанной с глубокими проблемами теории чисел, например, с обобщенной гипотезой Римана.
F. Lemmermeyer "The Euclidean algorithm in algebraic number fields"
M. A. Simachew "A survey on euclidean number fields"
V. Peric, M. Vukovic "Some examples of principal ideal domain which are not Euclidean"
D. A. Clark, M. R. Murty "The Euclidean algorithm for Galois extensions of Q"

Начиная со 2 курса

5. *Почему эллиптические интегралы не берутся.* Ответ на вопрос о том, почему интегралы от квадратных корней из кубических многочленов (эллиптические интегралы) не берутся, невозможен без понимания теории римановых поверхностей, раздела, играющего исключительно важную роль в математике.
А. Г. Хованский "Топологическая теория Галуа"

6. *Графы расширители и модулярные формы*. Графы расширители – это «очень связные» графы со сравнительно небольшим числом ребер. Они оказываются полезными как в практических задачах теории информации и теории кодирования, так и в теоретических вопросах. Имеются удивительные конструкции графов расширителей с использованием таких, казалось бы, абстрактных математических объектов как модулярные формы.
П. Сарнак "Модулярные формы и их приложения"

7. *Простые числа вида x^2+n y^2 и теория комплексного умножения.* Несложный по формулировке вопрос о характеризации простых чисел вида x^2+ny^2 приводит к очень глубоким и красивым теориям. Ключевыми оказываются два ингредиента - теория полей классов и ее явный вид для мнимых квадратичных полей: теория эллиптических кривых с комплексным умножением. Теория комплексного умножения оказывается применимой во

многих других задачах, например, в решении проблемы Гаусса о перечислении мнимых квадратичных полей с числом классов идеалов один.
D. A. Cox "Primes of the form x^2+ny^2"
J. Silverman "Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves"

8. *Рациональность дзета-функций проективных и аффинных алгебраических многообразий.* Гипотезы Вейля о дзета-функциях многообразий (рациональность, абсолютная величина нулей и полюсов и т.п.) играли ключевую роль в формировании алгебраической геометрии. Теорема Дворка дала ответ на часть этих гипотез о рациональности дзета-функций.
Н. Коблиц "p-адический анализ, p-адические числа и дзета-функции"

9. *Упаковки шаров и теория чисел*
Вопрос о том, как наиболее плотно упаковать шары в n-мерном пространстве, оказывается очень трудным. Ответ на него известен лишь в размерностях 1, 2, 3, причем в размерности 3 доказательство было получено совсем недавно.
Удивительным образом арифметическая геометрия и теория чисел являются источником примеров и конструкций упаковок шаров, которые нередко являются наиболее плотными из известных.
Дж. Конвей, Дж., Н. Слоэн "Упаковки шаров, решетки и группы"
M. A. Tsfasman "Lectures on global fields, lattices, and codes", Methods of discrete mathematics (Braunschweig, 1999), Quad. Mat., 5, Aracne, Rome, 1999, pp.145-183
M. A. Tsfasman "Global fields, codes and sphere packings", Journees Arithmetiques 1989. "Asterisque", 1992, v.198-199-200, pp.373-396

10. *Вычисление \tau(n) за полиномиальное время. Модулярные кривые, представления Галуа, высоты и геометрия Аракелова.*
Дельта функция Рамануджана – один из первых примеров модулярных форм, оказывающийся при этом крайне важным и ведущий к множеству теорий и гипотез. Базовый вопрос о быстром вычислении коэффициентов разложения делта-функции в q-ряд (ряд Фурье) требует для своего решения привлечения множества красивых математических теорий.
Bas Edixhoven, Jean-Marc Couveignes, Robin de Jong, Franz Merkl, Johan Bosman "Computational aspects of modular forms and Galois representations", arXiv:math/0605244

11. *Дзета-функции групп.* Во многих разделах математики (в особенности в арифметической геометрии и теории чисел) применение дзета-функций приводит к замечательным результатам. Теория групп не является исключением.
M. de Sautoy “Zeta functions of groups: The quest for order versus the flight from ennui”