Прикладные методы анализа. Листок 1. Преобразование Лапласа

Решение задач 1а,б, 2а-д, 3а-г, 5а-в, 7,8 входит в необходимые условия получения зачета и допуска к экзамену. Последний срок сдачи этих задач – 1 октября.

1. а) Докажите лемму Жордана (или изложите известное доказательство): если на некоторой последовательности дуг окружностей $|z| = R_n$, $\operatorname{Im} z > a$, функция $g(z)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$, то для любого положительного числа λ $\lim_{R_n \to \infty} \int_{|z|=R_n, \operatorname{Im} z > a} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0$;

   б) Для всякого $a \neq \pm 1$ вычислите интеграл по вертикальной прямой

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 - 1} dp.$$

Определение. **Оригиналом** называется функция $f(t)$ вещественного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

(1) $f(t) = 0$ при $t < 0$

(2) $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных точек, где она имеет разрывы 1 рода, т.е., для всех t, кроме отдельных изолированных точек,

$$|f(t + h) - f(t)| < A|h|^a$$

для всех h, $|h| < h_0$ при некоторых положительных A и a;

(3) $f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты, т.е., $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для некоторого $M > 0$ и вещественного s_0, называемого показателем роста $f(t)$.

Преобразованием Лапласа функции (оригинала) $f(t)$ называется функция комплексного переменного p (изображение)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

Она аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Фраза “функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$” записывается как $f(t) \div F(p)$ или $F(p) \div f(t)$.

2. Пусть $f(t) \div F(p)$. Выведите следующие свойства преобразования Лапласа, считая, что все левые части равенств являются оригиналами:

а) запаздывание оригинала $f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p)$, $\tau > 0$.

б) смещение изображения $e^{p_0 t} f(t) \div F(p - p_0)$,

в) дифференциирование оригинала $f'(t) \div pF(p) - f(0)$,

г) интегрирование оригинала $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$

д) дифференциирование изображения $tf(t) \div -F'(p)$

е) умножение изображений: $f(t) * g(t) \div F(p)G(p)$, где $f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$.

В каких пунктах дополнительное условие на левую часть излишне?

3. Найдите изображения следующих функций, равных нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ определяемых формулами:

$$\text{а) } f(t) = e^{\lambda t} \cos t, \quad \text{б) } f(t) = e^{\lambda t} \sin t;$$

$$\text{в) } f(t) = t^n e^{\lambda t}; \qquad \text{г) } f(t) = e^{At}, \text{ где } A \text{ – матрица};$$

$$\text{д) } f(t) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}, \qquad \text{е) } f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}.$$

4. Докажите, что всякая рациональная функция $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, $\deg P < \deg Q$ является изображением некоторого оригинала и этот оригинал может быть найден по формуле $f(t) = \sum \operatorname{Res} \frac{P(p)}{Q(p)} e^{pt}$.

5. Используя преобразование Лапласа, найдите решение следующих задач Коши:

а) $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$,

б) $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,

в) $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$.

г) $x'' + x = \varphi(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, где $\varphi(t) = 1$ при $0 < t < \pi$, $\varphi(t) = 0$ при $t > 2\pi$

д) $x' + x = \varphi(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, где $\varphi(t) = 1$ при $4n\pi < t < (4n+2)\pi$, $\varphi(t) = 0$ при $(4n+2)\pi < t < (4n+4)\pi$, $n = 0, 1, \ldots$.

6. Пусть $F(p)$ - функция, аналитичная в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$, стремящаяся к нулю при $\mathrm{Re}\, p \to +\infty$, такая, что интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится для некоторого $a > s$. Покажите, что функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

является оригиналом, изображение которого совпадет с $F(p)$. Описывают ли эти условия все возможные изображения?

Замечание Основное нетривиальное место доказательства – использование равномерной сходимости внутреннего интеграла для перестановки порядков интегрирования в двойном интеграле $\int_0^\infty dt\ e^{-pt} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\ F(q)e^{qt}$, где p, $\mathrm{Re}\, p > a > s_0$ фиксировано.

7. Пользуясь задачей 3г, вычислите при помощи преобразования Лапласа матричную экспоненту e^{At} для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; решите задачу Коши $x'(t) = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8. В электрическом контуре с активным сопротивлением $R = 1$, катушкой индуктивности $L = 4$ и конденсатором емкости $C = 1$ с начальным зарядом $q_0 = 0.5$ (в нулевой момент времени) включен источник переменного тока, создающий на своем выходе напряжение $E = \cos t$. Вычислите значение тока, проходящего через активное сопротивление в момент времени t. В начальный момент времени ток нулевой.