Листок 2. Действительные числа, топология прямой.

Анализ, 1 курс, **25.09.2013**

Срок сдачи листка — до 16 октября включительно.

Задачи можно сдавать на математическом практикуме по анализу, а также, по согласованию с преподавателями, ведущими математический анализ на 1 курсе, на их консультационных часах. Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее 18 баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

2⋄1^0 При каких $a \in \mathbb{R}$ следующие множества (а) $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$, (б) $\{a^n/n! | n \in \mathbb{N}\}$ ограничены?

2⋄2^0 Докажите по указанию преподавателя эквивалентность некоторых из следующих формулировок аксиомы полноты множества действительных чисел:

– Если X и Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие свойством, что для любых двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leqslant y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

– У любого непустого ограниченного сверху подмножества $X \subset \mathbb{R}$ существует точная верхняя грань.

– Любая монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел имеет предел.

– Принцип вложенных отрезков: для любой бесконечной последовательности вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, найдется единственное действительное число, принадлежащее всем этим отрезкам.

2⋄3^0 Придумайте последовательность вложенных интервалов с пустым пересечением.

2⋄4 **а)** Дано множество отрезков на прямой, причем любые два из них имеют общую точку. Верно ли, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам?

б) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат? (Прямоугольники рассматриваются вместе с внутренностью.)

в) Верно ли это для произвольных прямоугольников на плоскости?

г***)** Верно ли данное утверждение для произвольных прямоугольников на плоскости, если любые три из них имеют непустое пресечение?

2⋄5 Докажите, что уравнение $x^n = a$ при $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ имеет положительный корень, который обозначают $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$.

Предельной точкой множества называется точка, в любой окрестности которой имеется еще по крайней мере одна точка множества. *Замкнутым* называется множество, содержащее все свои предельные точки. *Открытым* называется множество, которое содержит вместе с любой своей точкой некоторую ее окрестность. Точка множества называется *изолированной*, если у нее существует окрестность, в которой нет других точек множества, а точка, у которой имеется окрестность, целиком принадлежащая множеству, называется *внутренней точкой* множества.

2⋄6^0 Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

2⋄7^0 **а)** Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств открыто, а пересечение любого семейства замкнутых замкнуто.

б) Докажите, что пересечение конечного семейства открытых множеств открыто, а конечное объединение занкнутых замкнуто.

2⋄8^0 Покажите, что бесконечное пересечение открытых множеств может быть не открыто, а объединение бесконечного семейства замкнутых может быть не замкнуто.

2⋄9 **а)** Докажите, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто.

б***)** Докажите, что любое замкнутое множество на прямой является множеством предельных точек некоторой последовательности.

2⋄10^0 Докажите, что ограниченное множество, не имеющее предельных точек, конечно.

2⋄11 Найдите все предельные точки множеств **а)** $\{m^{-1}+n^{-1}\,|\,m,n\in\mathbb{N}\}$; **б)** $\{m+n\sqrt{2}\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\}$; **в)** $\{\sqrt{m}-\sqrt{n}\,|\,m,n\in\mathbb{N}\}$; **г*****)** $\left\{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\,|\,m,n\in\mathbb{N}\right\}$.

2⋄12^0 Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Канторовым множеством C называется множество, получаемое пересечением множеств C_n ($n\in\mathbb{N}$), где C_n строятся по следующей процедуре: C_1 – это $[0,1]\setminus(1/3,2/3)$, отрезок $[0,1]$ с выкинутой средней третью, $C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$, C_{n+1} получается из C_n удалением средней трети из каждого отрезка, составляющего C_n.

2⋄13 Докажите, что **а)** множество C имеет мощность континуума; **б)** множество C замкнуто и не имеет ни изолированных, ни внутренних точек; **в)** сумма длин интервалов, составляющих множество $[0,1]\setminus C$, равна единице.

Множество называется *всюду плотным,* если любой непустой интервал содержит элементы множества, и *нигде не плотным*, если внутри любого непустого интервала можно выбрать другой непустой интервал, не содержащий ни одного элемента множества.

2⋄14 Докажите, что **а**^{0}**)** множество рациональных чисел всюду плотно; **б)** множество Кантора нигде не плотно.

2⋄15* Опишите множества $C+C$ и $C-C$, где $C\pm C=\{a\pm b\,|\,a,b\in C\}$.

2⋄16* Докажите, что любое открытое множество на прямой представляется в виде конечного или счетного объединения попарно непересекающихся интервалов и открытых лучей.

2⋄17* Пусть X – открытое не ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$. Всегда ли существует такое положительное число a, что множество X содержит бесконечно много точек вида na ($n\in\mathbb{N}$).